



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală

18 februarie 2017

Clasa a X-a

1. Fie triunghiul ABC și $f: [BC] \rightarrow (0, \infty)$ definită prin $f(M) = d(A, M)$.

- Pentru ce triunghi funcția este injectivă?
- Determinați mulțimea valorilor funcției f .

2. a) Să se determine $z \in \mathbb{C}$ astfel încât:

$$|z - 4 + i| - 2z = 3 - 6i.$$

b) Dacă z este un număr complex de modul 1, arătați că:

$$\sqrt{3} \leq |1+z| + |1-z+z^2| \leq \frac{13}{4}.$$

Când se realizează egalitățile?

3. Determinați șirul de numere reale strict pozitive $(x_n)_{n \geq 1}$, cu proprietatea că:

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n + \log_2 \left(\frac{x_{n+2} + x_n}{x_{n+1}} \right) = 1, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*, x_{1006} = 2016,$$

$$x_{2017} = 4038.$$

4. a) Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Să se arate că: $(a^2 + 1) \cdot (b^2 + 1) \geq (a + b)^2$.

b) Fie $a, b, c \geq 1$. Demonstrați că:

$$\log_{a+b} (a^2 + 1)(c^2 + 1) + \log_{b+c} (b^2 + 1)(a^2 + 1) + \log_{c+a} (c^2 + 1)(b^2 + 1) \geq 6.$$

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.