

Barem clasa a IX-a

1. a) Se obține $0 \leq (a - b)^2$ 3p

b) Folosind inegalitatea precedentă, rezultă:

$$(a^2 + b^2) + (c^2 + d^2) \geq \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(c+d)^2}{2} = \frac{1}{2} [(a+b)^2 + (c+d)^2] \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{(a+b+c+d)^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{2} = 1 \quad \dots\dots\dots 4p$$

2. Fie $p \in N^*$ cu proprietatea că $a_{a_p} = a_p + a_{p+1}$. Se obține că $a_1 + (a_p - 1)r = a_1 + (p-1)r + a_1 + pr$ sau $a_1 = (a_p - 2p)r$, deci a_1 se divide cu r . Fie $a_1 = mr, m \in N^*$. Rezultă că $mr = (a_1 + (p-1)r - 2p)r$ sau , după simplificare , $m = mr + (p-1)r - 2p$ care se poate scrie $r(m + p - 1) = m + 2p$, de unde $r = \frac{2p+m}{p+m-1} = 1 + \frac{p+1}{m+p-1} \in N^*$. Din această relație este necesar ca $m \in \{1, 2\}$ 4p

- Pentru $m=1$ se obține că $r = 2 + \frac{1}{p} \in N^*$ pentru $p=1$. Așadar $r=3$, $a_1=3$ și $a_n = 3n$. În acest caz $a_n \neq 2014$ 1p

- Pentru $m=2$ se obține că $r=2$, $a_1=4$ pentru oricare $p \in N^*$, deci $a_n = 2n+2$. Cum $2n+2=2014$ are soluție rezultă că 2014 este termen al progresiei. Egalitatea este verificată pentru oricare $p \in N^*$, și, astfel, $A = N^*$ ($a_n = 2n+2$ verifică relația $a_{2p+2} = a_p + a_{p+1}$ pentru orice $p \in N^*$).2p

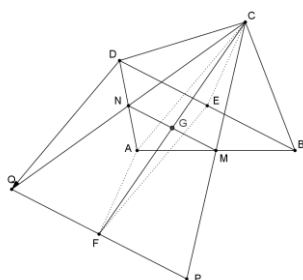
3. a) $[MN]$ este linie mijlocie în triunghiul CPQ și în triunghiul ADB . Se obține că $PQ = 2MN = BD$ și $PQ \parallel MN \parallel BD$, deci patrulaterul $BDQP$ este paralelogram și astfel vectorii $\overrightarrow{BP}$ și $\overrightarrow{DQ}$ sunt egali.....3p

b) $\overrightarrow{CP} + \overrightarrow{CQ} = 3\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{CN} + 2\overrightarrow{CM} = 3\overrightarrow{CA} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{CA}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AN} + 2\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$ deci $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ și $ABCD$ este paralelogram.....2p

c) Notăm cu G mijlocul lui $[MN]$. Dacă $ABCD$ este paralelogram, A, G, E, C coliniare, C, G, F coliniare, deci $E, A, F \in CG$ și C, A, E, F coliniare (aliniat pe mediana triunghiului CPQ).1p

Dacă $ABCD$ nu este paralelogram, se observă ușor că A, G, E sunt pe mediana din A în triunghiul ADB și deci $[AG] \equiv [GE]$. De asemenea $[GF] \equiv [GC]$, $[MN]$ fiind linie mijlocie și $[CF]$ mediană în CPQ .

Se obține că patrulaterul $CAFE$ este paralelogram.....1p



$$4. \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{1+k} \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{1+k} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{1+k} (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \left(1 - \frac{1}{1+k}\right) \overrightarrow{AB} + \frac{1}{1+k} \overrightarrow{AC} = \frac{k}{1+k} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{1+k} \overrightarrow{AC} = \frac{1}{1+k} (k \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \text{ ..4p}$$

Deci $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{1+k} \overrightarrow{AD}$, $\frac{1}{1+k} \neq 1$, de unde rezultă A, D, E coliniare

.....3p