Olimpiada naţională de matematică,Etapa locală, 15 februarie 2014,Clasa a IX a, Barem de evaluare

(1) a) Notând $x=[x]+\alpha,\alpha\in[0,1)$ şi $y=[y]+\beta,\beta\in[0,1)$, deducem că $\beta=0,2$ şi $\alpha=0,15$ sau $\alpha=0,65$	(2p)
Se obţin imediat perechile $(x,y)=(1,15;3,2)$ şi $(x,y)=(0,65;4,2)$	(1p)
b) pentru că egalitatea trebuie să aibă loc pentru orice număr real x, ea trebuie să aibă loc, printre altele, pentru $x=\frac{1}{n}$. Rezultă că $\left\{\frac{1}{n}\right\}+\left\{\frac{2}{n}\right\}=0+\frac{1}{n}$. Dacă $n\geq 3$ această relaţie revine la $0=\frac{1}{n}$, fals. Aşadar pentru $n\geq 3$ egalitatea din enunţ nu are loc pentru orice $x\in\mathbb{R}$. Rămân de tratat cazurile $n=1$ şi $n=2$.	(1p)
○ Pentru $n=1$ egalitatea din enunţ devine $\{x\}+\{x+1\}=\{x\}+1$, adică $\{x+1\}=1$ care nu este adevărată pentru orice $x\in\mathbb{R}$ (este chiar falsă pentru orice $x\in\mathbb{R}$)	(1p)
○ pentru $n=2$ egalitatea din enunţ revine la $\{x\}+\left\{x+\frac{1}{2}\right\}=\{2x\}+\frac{1}{2}$ adică $x-[x]+x+\frac{1}{2}-\left[x+\frac{1}{2}\right]=2x-[2x]+\frac{1}{2}$, deci la $[2x]=[x]+\left[x+\frac{1}{2}\right]$, care este identitatea lui Hermite, adevărată pentru orice număr real x. Aşadar singurul număr natural care satisface egalitatea din enunţ este $n=2$.	(2p)
(2) (i) de exemplu $f(x)=x-1$(justificare !)	(2p)
(ii) pentru $a=b=0\Rightarrow f(0)\leq 0$ (1)	(1p)
Deosebim cazurile: (I) $f(1)=f(-1)=1$; luăm $a=1,b=-1$în inegalitatea din enunţ şi ajungem la $f(0)\geq 2$, contradicţie cu (1)	(1p)
(II) $f(1)=1, f(-1)=-1$. Luăm $a=1,b=-1$ şi se ajunge la $f(0)\geq 0\overset{(1)}{\Rightarrow} f(0)=0$	(1p)
Pentru $a=b=1\Rightarrow f(2)\geq 2$, iar pentru $a=2,b=-1\Rightarrow f(2)\leq 2$, deci $f(2)=2$	(2p)
(3) Remarcăm pentru început, din a doua ecuaţie, că $n\in\mathbb{N}$, apoi imediat $n\neq 0$	(1p)
Folosind inegalitatea $(x+y)^2\leq 2(x^2+y^2)$ deducem că $4^n\leq 2n^3\Rightarrow n\leq 2$ (se demonstrează prin inducţie că $4^n>2n^3,\forall n\in\mathbb{N},n\geq 3$	(3p)
Pentru $n=1$se ajunge la un sistem fără soluţii întregi	(1p)
Pentru $n=2$ se găseşte unica soluţie $(x,y)=(2,2)$	(2p)
(4) $\overrightarrow{TN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ şi $\overrightarrow{AP}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$	(2p)
$\overrightarrow{TR}=\overrightarrow{TN}+\overrightarrow{NR}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MN}$	(1p)
$\overrightarrow{TR}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CN}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$	(1p)
$\overrightarrow{TR}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$	(1p)
$\overrightarrow{PT}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$	(1p)
$\overrightarrow{PT}=\frac{3}{2}\overrightarrow{TR}$ şi astfel se deduce imediat concluzia dorită	(1p)
Notă: Evident, orice altă soluţie corectă se punctează corespunzător.	
Observaţie: pentru o soluţie elementară se poate consulta GM 9/2013, pagina 404	