

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
16.02.2014

Bareme de corectare
CLASA a VI - a

Subiectul I

Unghiurile $\widehat{AOB}$ și $\widehat{AOC}$ sunt suplementare neadiacente. Dacă $m(\widehat{AOB}) < m(\widehat{AOC})$ și $m(\widehat{BOC}) = 40^\circ$, calculați măsura unghiului $\widehat{DOE}$, unde $[OD]$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB}$ și $[OE]$ este semidreapta opusă semidreptei $[OC]$.

Barem:

Desenează corect unghiurile $\widehat{AOB}$ și $\widehat{AOC}$ neadiacente	1 p
$m(\widehat{AOB}) + m(\widehat{AOC}) = 180^\circ$	1 p
$m(\widehat{AOB}) = 70^\circ$; $m(\widehat{AOC}) = 110^\circ$	2 p
$[OD]$ este bisectoarea unghiului $\widehat{AOB} \Rightarrow m(\widehat{AOD}) = 35^\circ$.	1 p
$[OE]$ și $[OC]$ opuse $\Rightarrow m(\widehat{COE}) = 180^\circ$, deci $m(\widehat{AOE}) = 70^\circ$.	1 p
$m(\widehat{DOE}) = m(\widehat{DOA}) + m(\widehat{AOE}) = 105^\circ$	1 p

Subiectul II

Se consideră șirul de numere : $a_1 = \frac{1}{11} - \frac{1}{19}, a_2 = \frac{12}{11} - \frac{20}{19}, a_3 = \frac{23}{11} - \frac{39}{19}, \dots$
Demonstrați că $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{209}$ este un număr natural.

Barem1:

$a_1 = \frac{1}{11} - \frac{1}{19} = \frac{1+0 \cdot 11}{11} - \frac{1+0 \cdot 19}{19}$	1 p
$a_2 = \frac{12}{11} - \frac{20}{19} = \frac{1+1 \cdot 11}{11} - \frac{1+1 \cdot 19}{19}$	1 p
$a_3 = \frac{23}{11} - \frac{39}{19} = \frac{1+2 \cdot 11}{11} - \frac{1+2 \cdot 19}{19}$	
$a_{209} = \frac{1+208 \cdot 11}{11} - \frac{1+208 \cdot 19}{19}$	1 p
$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{209} = \frac{209 + \frac{208 \cdot 209}{2} \cdot 11}{11} - \frac{209 + \frac{208 \cdot 209}{2} \cdot 19}{19}$	3 p
$= \frac{209}{11} - \frac{209}{19} = 8 \in \mathbb{N}$	1 p

Barem2:

$a_1 = \frac{1}{11} - \frac{1}{19} = \frac{8}{209}$	1 p
$a_2 = \frac{12}{11} - \frac{20}{19} = \frac{8}{209}$	1 p
$a_n = \frac{1+n \cdot 11}{11} - \frac{1+n \cdot 19}{19}$	3 p
$a_n = \frac{209n+19-209n-11}{209} = \frac{8}{209}$, pentru orice număr natural n	1p
$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{209} = 209 \cdot \frac{8}{209} = 8 \in \mathbb{N}$	1 p

Subiectul III

Se consideră pătratul de dimensiune 3×3 , în căsuțele căruia se află numărul 6. Se alege la întâmplare un pătrățel și se mărește numărul din interiorul său cu 2, 3 sau 4, după câte pătrățele vecine au o latură comună cu acesta și se scade o unitate din numerele situate în pătrățelele vecine. Același lucru se poate face și micșorând numărul din pătrățelul ales cu 2, 3 sau 4 și măbind cu o unitate toate numerele din pătrățelele vecine, după modelul:

a	b	c		a-2	b+1	c		a+1	b	c		a	b-1	c
d	e	f	→	d+1	e	f	sau	d-3	e+1	f	sau	d-1	e+4	f-1
g	h	i		g	h	i		g+1	h	i		g	h-1	i

Toate transformările sunt posibile doar dacă păstrează în interiorul căsuțelor numere naturale.

a) Găsiți un șir de transformări care aduc pătratul inițial la forma

5	7	4
4	11	7
5	7	4

b) Demonstrați că pătratul inițial nu se poate aduce la forma

5	5	5
5	15	5
5	5	5

Barem:

Săptăm.						1 p																															
<table><tr><td>6</td><td>6</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>6</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>6</td><td>6</td></tr></table>	6	6	6	6	6	6	6	6	6	→	<table><tr><td>4</td><td>7</td><td>6</td></tr><tr><td>7</td><td>6</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>6</td><td>6</td></tr></table>	4	7	6	7	6	6	6	6	6																	
6	6	6																																			
6	6	6																																			
6	6	6																																			
4	7	6																																			
7	6	6																																			
6	6	6																																			
, sau orice alta transformare corecta																																					
<table><tr><td>4</td><td>7</td><td>6</td></tr><tr><td>7</td><td>6</td><td>6</td></tr><tr><td>6</td><td>6</td><td>6</td></tr></table>	4	7	6	7	6	6	6	6	6	→	<table><tr><td>4</td><td>8</td><td>4</td></tr><tr><td>7</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>6</td><td>6</td><td>6</td></tr></table>	4	8	4	7	6	7	6	6	6	→	<table><tr><td>4</td><td>8</td><td>4</td></tr><tr><td>8</td><td>6</td><td>7</td></tr><tr><td>4</td><td>7</td><td>6</td></tr></table>	4	8	4	8	6	7	4	7	6				2 p		
4	7	6																																			
7	6	6																																			
6	6	6																																			
4	8	4																																			
7	6	7																																			
6	6	6																																			
4	8	4																																			
8	6	7																																			
4	7	6																																			
<table><tr><td>4</td><td>8</td><td>4</td></tr><tr><td>8</td><td>6</td><td>8</td></tr><tr><td>4</td><td>8</td><td>4</td></tr></table>	4	8	4	8	6	8	4	8	4	→	<table><tr><td>4</td><td>7</td><td>4</td></tr><tr><td>7</td><td>10</td><td>7</td></tr><tr><td>4</td><td>7</td><td>4</td></tr></table>	4	7	4	7	10	7	4	7	4	→	<table><tr><td>5</td><td>7</td><td>4</td></tr><tr><td>4</td><td>11</td><td>7</td></tr><tr><td>5</td><td>7</td><td>4</td></tr></table>	5	7	4	4	11	7	5	7	4						
4	8	4																																			
8	6	8																																			
4	8	4																																			
4	7	4																																			
7	10	7																																			
4	7	4																																			
5	7	4																																			
4	11	7																																			
5	7	4																																			
Orice transformare pastreaza constanta suma elementelor tabelului(S=54)							2 p																														
Cum, suma elementelor tabelului ce trebuie obtinut la punctul b) este 55, rezulta ca acesta nu poate fi obtinut.							2p																														

Subiectul IV

Se consideră numărul A , format din n cifre de 1. Să se arate că A este divizibil cu 7 dacă și numai dacă n este divizibil cu 6.

Barem:

Numerele 1,11,111,1111,11111 nu sunt divizibile cu 7, verificare directă	1 p
111111:7=15873	1 p
Dacă notăm $a = 111111$ și $n = 6k$ atunci $A = a \cdot (1 + 10^6 + 10^{12} + \dots + 10^{6(k-1)})$ și cum 7 divide a obținem că 7 divide A	3 p
Dacă $n = 6k + r$, și $r \neq 0$ atunci $A = a \cdot (1 + 10^6 + 10^{12} + \dots + 10^{6(k-1)}) \cdot 10^r + x$ unde x este format din r cifre de 1. Cum 7 divide pe a și 7 nu divide pe x obținem că în această situație 7 nu divide pe A	2p