



Olimpiada Națională de Matematică 2018
Etapa locală – Iași, 1 februarie 2018

CLASA a V-a
Barem de corectare

Problema 1.

- a) Aflați câte numere naturale impare dau, prin împărțire la 2018, câtul egal cu restul.
b) Aflați restul împărțirii la 2018 a sumei tuturor numerelor determinate la punctul a).

Soluție și barem:

- a) Aplică teorema împărțirii cu rest: $n = 2018 \cdot c + c = 2019 \cdot c$, cu $c < 2018$ 1p
 Dacă n este număr impar, atunci c trebuie să fie impar, deci $c \in \{1, 3, 5, \dots, 2017\}$ 1p
 Stabilește numărul numerelor impare $(2017 - 1) : 2 + 1 = 1009$ numere2p
- b) Numerele sunt: $2019 \cdot 1, 2019 \cdot 3, 2019 \cdot 5, \dots, 2019 \cdot 2017$ 1p
 Calculează suma: $S = 2019 \cdot (1 + 3 + \dots + 2017) = 2019 \cdot (1 + 2017) \cdot 1009 : 2 = 2019 \cdot 1009^2$ 1p
 Calculează restul împărțirii lui S la 2018 și obține $r = 1009$ 1p

Problema 2.

Fie $A = 10^{n+2} + 10^n - a$, unde $n \in \mathbb{N}^*$ și a este cifră. Determinați a , știind că 15 divide A .

Soluție și barem:

Scrie numărul $A = 10100\dots 0 - a$ 2p
 $\quad \quad \quad n$

$$A = \underbrace{10100\dots 0}_n + 1 - a - 1 = \underbrace{10100\dots 01}_n - (a+1) \dots\dots\dots 2p$$

Numărul $10100\dots01$ are suma cifrelor 3, deci este divizibil cu 3..... .1p

Cum $A:15$ și $15:3$, trebuie ca $A:3$, deci $(a+1):3$, de unde $a+1 \in \{3, 6, 9\}$, iar $a \in \{2, 5, 8\}$1p

Cum $A:15$ și $15:5$, trebuie ca $A:5$, iar cum $(10^{n+2}+10^n):5$, deducem că $a:5$, de unde $a = 5 \dots\dots\dots 1p$

Problema 3.

- a) Știind că $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 49^2 + 50^2 = a$, calculați în funcție de a numărul $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 100 \cdot 101$.



- b) Dacă numărul natural $A = 2^{2018} - 1$ are, în scrierea sa în baza 2, n cifre identice, aflați valoarea numărului natural n .

Soluție și barem:

- a) Grupează câte doi termeni:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 2(1 + 3) = 2 \cdot 4 = 2 \cdot 2^2$$

$$3 \cdot 4 + 4 \cdot 5 = 4(3 + 5) = 4 \cdot 8 = 2 \cdot 4^2$$

$$5 \cdot 6 + 6 \cdot 7 = 6(5 + 7) = 6 \cdot 12 = 2 \cdot 6^2$$

.....

$$99 \cdot 100 + 100 \cdot 101 = 100(99 + 101) = 100 \cdot 200 = 2 \cdot 100^2 \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Scrie suma: } 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + 100 \cdot 101 = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 4^2 + \dots + 2 \cdot 100^2 = 2 \cdot (2^2 + 4^2 + \dots + 100^2)$$

$$= 2 \cdot 2^2 \cdot (1^2 + 2^2 + \dots + 50^2) = 8 \cdot a \dots\dots\dots 2p$$

- b) Singurele cifre posibile în baza 2 sunt 0 și 1, iar cum cifrele lui A în această bază sunt identice,

$$\text{deducem că } A = \underbrace{11\dots 1}_{n\text{-cifre}}_{(2)} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Scrierea în baza 2 implică } A = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \dots + 2 + 1 = 2^n - 1, \text{ de unde } n = 2018 \dots\dots\dots 2p$$

Problema 4.

- a) Fie p un număr prim mai mare decât 6. Aflați ultima cifră a numărului p^4 .

- b) Aflați numerele prime p și q , știind că $p^4 + q^4 = 29186$.

Soluție și barem:

- a) Dacă p este număr prim mai mare decât 6, atunci $UC(p) \in \{1, 3, 7, 9\} \dots\dots\dots 1p$

$$\text{Atunci } UC(p^2) \in \{1, 9\}, \text{ de unde } UC(p^4) = 1 \dots\dots\dots 1p$$

- b) Dacă p și q sunt numere prime, ambele mai mari decât 6, atunci $UC(p^4) = UC(q^4) = 1$, de

$$\text{unde } UC(p^4 + q^4) = 2, \text{ ceea ce contrazice ipoteza, deci } p \text{ sau } q \text{ este mai mic decât } 6. \dots\dots\dots 2p$$

Cum suma puterilor este un număr par, trebuie ca p și q să aibă aceeași paritate,

deci ambele sunt impare. 1p

$$\text{Dacă } p = 3, \text{ atunci } UC(3^4) = 1, \text{ de unde } UC(q^4) = 5, \text{ iar cum } q \text{ este prim trebuie ca } q = 5,$$

$$\text{dar } 3^4 + 5^4 = 81 + 625 = 706 \neq 29186, \text{ deci acest caz nu convine.} \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Dacă } p = 5, \text{ atunci } q^4 = 28561, \text{ deci } q = 13, \text{ iar soluțiile sunt } p = 5, q = 13 \text{ sau } p = 13, q = 5. \dots\dots\dots 1p$$