

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 16.02.2019
CLASA A VIII-A
Vâlcea**

SUBIECTUL 1

Fie $E(x) = 16x^2 - 32x + 25, x \in \mathbf{R}$.

- a) Dacă $m = (\sqrt{3} + 1)^2 - \sqrt{3} - 3$, arătați că $E(m) \in \mathbf{Z}$;
- b) Dacă $a \in \mathbf{Z}$, scrieți numărul $E(a)$ ca o sumă de două pătrate;
- c) Pentru $x \in \mathbf{N}$ determinați valoarea maximă a expresiei $F(x) = 10 - E(x)$.

SUBIECTUL 2

- a) Arătați că pentru oricare numere reale $x, y, z > 0$ este adevărată relația $x^2y + z \geq 2x\sqrt{yz}$.
- b) Demonstrați că $\frac{x}{x^2y+z} + \frac{y}{y^2z+x} + \frac{z}{z^2x+y} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$, oricare ar fi numerele reale $x, y, z > 0$.

Gazeta Matematică

SUBIECTUL 3

Fie $ABCA'B'C'D'$ un cub. Fie O și O' centrele fețelor $ABCD$, respectiv $A'B'C'D'$, iar M mijlocul muchiei BB' .

- a) Determinați aria triunghiului ACD' dacă ΔOBM are perimetrul egal cu $\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1} + \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right| + \frac{1}{2}$.
- b) Arătați că $D'M \perp AO$.
- c) Fie $(ABC) \cap O'M = \{P\}$ și R simetricul lui M față de punctul P . Arătați că B este centrul de greutate al triunghiului DMR .

SUBIECTUL 4

Fie piramida triunghiulară $VABC$ cu lungimile muchiilor laterale $VA = a$, $VB = b$ și $VC = c$. Fie E mijlocul lui $[AB]$ și O centrul de greutate al bazei ABC a piramidei.

- a) Arătați că $VE < \frac{a+b}{2}$.
- b) Arătați că $VO < \frac{a+b+c}{3}$.
- c) Dacă $a = b = c$ și $m(\sphericalangle(VB, AC)) = 60^\circ$ arătați că $\frac{AB^2 - BC^2}{AC} = a$.

Notă: Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect este punctat de la 0 la 7 puncte.