

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 10.02.2024

BAREM DE CORECTARE - Clasa a XII – a

PROBLEMA 1. Să se calculeze:

a) $\int \frac{2 - \cos^2 x + \sin 2x}{1 + e^{-x} + \sin^2 x} dx$; b) $\int_0^\pi \arcsin(\cos^{2023} x) dx$.

Barem de corectare. Avem:

a) $\int \frac{2 - \cos^2 x + \sin 2x}{1 + e^{-x} + \sin^2 x} dx = \int \left(1 + \frac{-e^{-x} + \sin 2x}{1 + e^{-x} + \sin^2 x} \right) dx = x + \ln(1 + e^{-x} + \sin^2 x) + C$ **(3p)**

b) Dacă $I = \int_0^\pi \arcsin(\cos^{2023} x) dx$, prin substituția $\frac{\pi}{2} - x = t$, se obține că
 $I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \arcsin(\sin^{2023} x) dx$ **(3p)**

Dar, cum funcția $f(x) = \arcsin(\sin^{2023} x)$ este impară, rezultă că $I = 0$ **(1p)**

PROBLEMA 2. Fie G un grup cu 10 elemente, cu elementul neutru e . Să se arate că dacă există două elemente distincte $a, b \in G \setminus \{e\}$, astfel încât $a^2 = b^2 = e$, atunci grupul G nu este abelian.

Barem de corectare. Deoarece $a \neq b$ și $a^2 = b^2 = e$, rezultă că $ab \notin \{e, a, b\}$. Așadar, mulțimea $H = \{e, a, b, ab\}$ are 4 elemente. **(4p)**

Dacă grupul G ar fi comutativ, atunci mulțimea H ar fi un subgrup al lui G , **(2p)**
ceea ce contrazice teorema lui Lagrange, deoarece $4 \nmid 10$ **(1p)**

PROBLEMA 3. Să se determine funcția $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ pentru care mulțimea

$$G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} x & f(x) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R}^* \right\}$$

are o structură de grup abelian în raport cu operația de înmulțire a matricelor.

Barem de corectare.

Deoarece, pentru orice elemente $x, y \in \mathbb{R}^*$, $A(x) \cdot A(y) = A(y) \cdot A(x)$, obținem că

$$x \cdot f(y) + f(x) = y \cdot f(x) + f(y) \Leftrightarrow (y-1) \cdot f(x) = (x-1) \cdot f(y).$$

Așadar, pentru $y = 2$ se obține că $f(x) = a(x-1)$, unde $a \in \mathbb{R}$ **(4p)**

Astfel,

$$A(x) = \begin{pmatrix} x & a(x-1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

și $A(x) \cdot A(y) = A(x \cdot y) \in G, \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^*$. Cum operația de înmulțire a matricelor este asociativă, $I_2 = A(1) \in G$ și $A(x)^{-1} = A\left(\frac{1}{x}\right) \in G, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$, rezultă că G este un grup abelian. (3p)

PROBLEMA 4. Fie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție continuă și $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a lui f . Să se arate ca nu există $a, b \in \mathbb{R}^*$, astfel încât

$$f(ax - bF(x)) = ax + b, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Barem de corectare. Presupunem ca există două numere $a, b \in \mathbb{R}^*$ care verifică relația din enunț.

Considerăm funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $g(x) = ax - bF(x)$.

Astfel, din $f(g(x)) = ax + b$ obținem că funcția $f \circ g$ este bijectivă, de unde rezultă că g este injectivă, iar f este surjectivă. (3p)

Din faptul că funcția g este continuă și injectivă, obținem că g este strict monotonă. (2p)

Dar, cum g este derivabilă, cu $g'(x) = a - bf(x)$, rezultă că

$$a - bf(x) \leq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{sau} \quad a - bf(x) \geq 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ceea ce contrazice surjectivitatea lui f (2p)

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.