

BAREM DE CORECTARE ȘI NOTARE

Clasa a VII-a

1. a) (2p) Scrieți numărul $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ ca o diferență de doi radicali simpli.

Prof. Schroder Laura

b) (5p) Rezolvați ecuația $x - \left[\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}} \right] = \frac{x}{2}$, unde $[a]$

reprezintă partea întreagă a numărului real a .

Prof. Sascău Gabriela

Soluție:

- a) Folosind formula radicalilor compuși se obține $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$.

b) $\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

$$\frac{3\sqrt{2}}{2} = \sqrt{\frac{9}{2}} = \sqrt{4,5} \text{ și cum } 2 < \sqrt{4,5} < 3 \Rightarrow \left[\frac{3\sqrt{2}}{2} \right] = 2.$$

Ecuația devine: $x - 2 = \frac{x}{2}$, cu soluția $x = 4$.

Barem

a) Arată că $\sqrt{5-2\sqrt{6}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$	2p
b) Calculează $\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} + \sqrt{5-2\sqrt{6}}}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.	2p
Calculează $\left[\frac{3\sqrt{2}}{2} \right] = 2$	2p
Finalizare	1p

2. Se consideră șirul de numere reale $\sqrt{23}, \sqrt{56}, \sqrt{89}, \sqrt{1112}, \dots, \sqrt{20182019}, \dots$

- a) (3p) Determinați al câtelea termen este $\sqrt{20182019}$. Scrieți al 2020-lea termen.

- b) (4p) Demonstrați că orice termen al șirului este un număr irațional.

Gazeta Matematică Nr.12/2018

Soluție:

- a) Se observă că: $23 = (3 \cdot 1 - 1)(3 \cdot 1)$, $56 = (3 \cdot 2 - 1)(3 \cdot 2)$, deci $20182019 = (3 \cdot 673 - 1)(3 \cdot 673)$. Prin urmare $\sqrt{20182019}$ este al 673-lea termen al șirului.

Al 2020-lea termen este $\sqrt{60596060}$.

b) Presupunem că există un număr natural $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, astfel încât $\sqrt{A(A+1)}$ să fie rațional. Atunci există un număr natural p astfel încât $\overline{A(A+1)} = p^2$, adică $A \cdot 10^n + A + 1 = p^2$. Cum $A = M_3 + 2 \Rightarrow A \cdot 10^n + A + 1 = M_3 + 2 + M_3 + 2 + 1 = M_3 + 2$, deci $p^2 = M_3 + 2$, ceea ce este fals.

Barem

a)	$23 = \overline{(3 \cdot 1 - 1)(3 \cdot 1)}$, $56 = \overline{(3 \cdot 2 - 1)(3 \cdot 2)}$, deci $20182019 = \overline{(3 \cdot 673 - 1)(3 \cdot 673)}$	1p
	$\sqrt{20182019}$ este al 673-lea termen al șirului	1p
	Al 2020-lea termen este $\sqrt{60596060}$	1p
b)	Presupunem că există un număr natural $A = \overline{a_1 a_2 \dots a_n}$, astfel încât $\sqrt{A(A+1)}$ să fie rațional. Atunci există un număr natural p astfel încât $\overline{A(A+1)} = p^2$, adică $A \cdot 10^n + A + 1 = p^2$	2p
	$A = M_3 + 2 \Rightarrow A \cdot 10^n + A + 1 = M_3 + 2 + M_3 + 2 + 1 = M_3 + 2$	1p
	Un pătrat perfect nu poate fi de forma $M_3 + 2$ deci presupunerea este falsă	1p

3. (7p) Fie AB un diametru al cercului $C(O, r)$. Prin punctul P, mijlocul segmentului OA, construim perpendiculara pe AB care intersectează cercul în punctele C și D. Tangenta în C la cerc intersectează dreapta AB în M. Arătați că A este mijlocul segmentului OM.

Gazeta Matematică Nr.12/2019

Soluție:

$\triangle OCD$ este isoscel și $OP \perp CD \Rightarrow CP = PD$ și cum $AP = PO$ și $OC = OD$, vom avea că ACOD este romb.

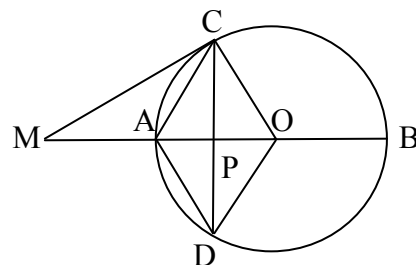
$\sphericalangle AOC$ este unghi la centru deci $\sphericalangle AOC = \widehat{AC}$.

$\sphericalangle ADC$ este unghi înscris în cerc deci

$\sphericalangle ADC = \frac{\widehat{AC}}{2} = \sphericalangle ODC$.

Prin urmare $\sphericalangle AOC \equiv \sphericalangle ADO \equiv \sphericalangle ACO$ deci $\triangle ACO$ este echilateral $\Rightarrow$

$\sphericalangle AOC = 60^\circ$. Cum CM este tangentă cercului $\Rightarrow OC \perp CM$, deci $\sphericalangle CMO = 30^\circ$. Folosind proprietatea triunghiului dreptunghic obținem că $OC = \frac{OM}{2} \Rightarrow AO = \frac{OM}{2}$.



Barem

Realizarea desenului	1p
Demonstrează că ACOD este romb	1p
Demonstrează că triunghiul AOC este echilateral	2p
CM este tangentă cercului $\Rightarrow OC \perp CM$, deci $\sphericalangle CMO = 30^\circ$	1p
Finalizare	2p

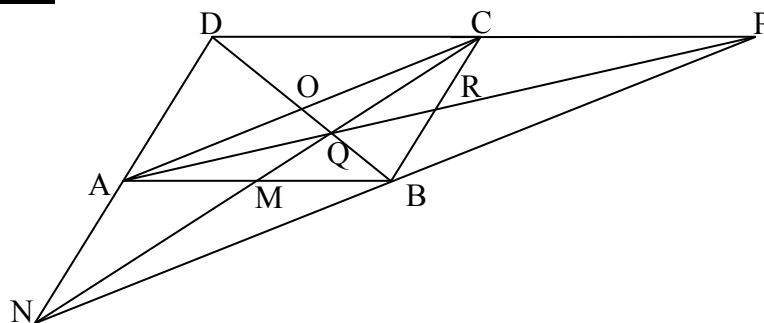
4. În paralelogramul ABCD, M este mijlocul laturii AB, $CM \cap AD = \{N\}$, $NB \cap CD = \{P\}$ și $CM \cap BD = \{Q\}$.

a) (4p) Demonstrați că ACPN este trapez și calculați raportul dintre aria trapezului ACPN și aria paralelogramului ABCD.

b) (3p) Demonstrați că punctele A, Q și P sunt coliniare.

Prof. Sascău Gabriela

Soluție:



a) $AN \parallel BC$ și $AN = BC$ (din congruența triunghiurilor AMN și BMC) $\Rightarrow$ ACBN este paralelogram $\Rightarrow AC \parallel NB$ și cum $N - B - P \Rightarrow AC \parallel NP$ și cum $AN \cap CP = \{D\} \Rightarrow$ ACPN este trapez.

ABCD – paralelogram $\Rightarrow A_{ABC} = A_{ABCD} / 2$

ACBN – paralelogram $\Rightarrow A_{ACBN} = 2A_{ABC}$

$AC \parallel BP$ și $AB \parallel CP \Rightarrow$ ACPB – paralelogram $\Rightarrow A_{BCP} = A_{ABC}$.

Prin urmare $A_{ACPN} = 3A_{ABC} = 3 \cdot \frac{A_{ABCD}}{2} \Rightarrow \frac{A_{ACPN}}{A_{ABCD}} = \frac{3}{2}$.

b) Fie $AC \cap BD = \{O\}$. CM și BO sunt mediane în triunghiul ABC și $CM \cap BO = \{Q\} \Rightarrow Q$ este centrul de greutate al triunghiului ABC deci AQ este mediană în triunghiul ABC. Dacă $AQ \cap BC = \{R\} \Rightarrow R$ este mijlocul segmentului BC. Cum ACPB este paralelogram $\Rightarrow R \in AP$, prin urmare A, Q și P sunt coliniare.

Barem

a) $AN \parallel BC$ și $AN = BC$ (din congruența triunghiurilor AMN și BMC) $\Rightarrow$ ACBN este paralelogram $\Rightarrow AC \parallel NB$ și cum $N - B - P \Rightarrow AC \parallel NP$ și cum $AN \cap CP = \{D\} \Rightarrow$ ACPN este trapez.	2p
ABCD – paralelogram $\Rightarrow A_{ABC} = A_{ABCD} / 2$ ACBN – paralelogram $\Rightarrow A_{ACBN} = 2A_{ABC}$ $AC \parallel BP$ și $AB \parallel CP \Rightarrow$ ACPB – paralelogram $\Rightarrow A_{BCP} = A_{ABC}$. Prin urmare $A_{ACPN} = 3A_{ABC} = 3 \cdot \frac{A_{ABCD}}{2} \Rightarrow \frac{A_{ACPN}}{A_{ABCD}} = \frac{3}{2}$.	2p
b) Demonstrează că punctul Q este centrul de greutate al triunghiului ABC	2p
Finalizare	1p

Notă: Orice altă soluție corectă se va puncta corespunzător.