

**OLIMPIADA DE MATEMATICĂ**  
**Faza locală**  
**Braşov, 9 februarie 2024**

**Clasa a X-a**

1. Fie numărul real  $a = \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[8]{3} \cdot \dots \cdot \sqrt[2^{2024}]{3}$ .

- (a) Demonstrați că  $[a] = 2$ , unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului  $a$ .
- (b) Aflați cel mai mic număr  $n \in \mathbb{N}^*$ , pentru care  $a^1 \cdot a^2 \cdot a^3 \cdot \dots \cdot a^n \in \mathbb{Q}$ .

\*\*\*

2. Considerăm numerele complexe  $z_1, z_2, z_3$ , de modul egal cu 1, cu proprietatea că

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 z_3 = 1.$$

- (a) Arătați că  $(1 - z_1)(1 - z_2)(1 - z_3) = 0$ .
- (b) Determinați tripletele  $(z_1, z_2, z_3)$  cu proprietatea din enunț.

\*\*\*

3. Fie  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , definită prin  $f(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{5} \right\rfloor$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .

- (a) Arătați că  $f$  nu este surjectivă.
  - (b) Determinați  $m \in \mathbb{N}$  pentru care ecuația  $f(x) = m$  are soluție unică.
- $([x])$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $x$ )

Gazeta Matematică

4. Fie  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  o funcție surjectivă cu proprietatea

$$f(x+y) \geq f(x) + y, \text{ pentru oricare } x, y \geq 0.$$

Demonstrați că:

- (a)  $f$  este inversabilă;
- (b)  $f^{-1}(x+y) \leq f^{-1}(x) + y$ , pentru oricare  $x, y \geq 0$ , unde  $f^{-1} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  este inversa funcției  $f$ .

Romeo Ilie

Notă. Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect valorează 7 puncte.  
Timp de lucru 3 ore.