

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
9 FEBRUARIE 2013
CLASA a VI-a
Bareme

Subiectul 1.

a. $a = 2^{2n+2} \cdot 7^{n+3} + 11 \cdot 2^{2n+5} \cdot 7^n + 2^{2n} \cdot 7^{n+3} - 27 \cdot 2^{2n+1} \cdot 7^n$
 $= 2^{2n} \cdot 2^2 \cdot 7^n \cdot 7^3 + 11 \cdot 2^{2n} \cdot 2^5 \cdot 7^n + 2^{2n} \cdot 7^n \cdot 7^3 - 27 \cdot 2^{2n} \cdot 2^1 \cdot 7^n$
 $= 2^{2n} \cdot 7^n \cdot (2^3 \cdot 7^3 + 11 \cdot 2^5 + 7^3 - 27 \cdot 2^1)$
 $= 2^{2n} \cdot 7^n \cdot (4 \cdot 343 + 11 \cdot 32 + 343 - 54)$
 $= 2^{2n} \cdot 7^n \cdot 2013$

Deci a se divide cu 20133p.

b.

Fie d – divizor comun al nr. a si b

$$d/21^n \cdot 3 + 4 \Rightarrow d/21^{n+1} + 28$$

$$d/21^n \cdot 7 + 6 \Rightarrow d/21^{n+1} + 18 \Rightarrow d/10 \Rightarrow d \in \{1, 2, 5, 10\} \dots\dots\dots 2p$$

$$u(a)=7, u(b)=3 \Rightarrow d=1 \dots\dots\dots 2p$$

Subiectul 2.

Notez cu x lungimea de drum pe care prima echipă o lucrează în plus în fiecare zi față de ziua precedentă.

Echipa 1 construiește: 1 km în prima zi, (1+x)km a doua zi, (1+2x)km în a treia zi, ..., (1+59x)km în a 60-a zi $\Rightarrow 1 + 59x = 3 \Rightarrow x = \frac{2}{59} \text{km}$

Lungimea de drum construită de prima echipă este:

$$1 + 1 + \frac{2}{59} + 1 + 2 \cdot \frac{2}{59} + \dots + 1 + 59 \cdot \frac{2}{59} = 60 + \frac{2}{59} (1 + 2 + \dots + 59)$$

$$= 60 + \frac{2}{59} \cdot 59 \cdot 60 : 2 = 120 \text{km} \dots\dots\dots 3p.$$

Notez cu y lungimea de drum pe care a doua echipă o lucrează în minus în fiecare zi față de ziua precedentă.

Echipa 2 construiește: 4 km în prima zi, (4-x)km a doua zi, (4-2x)km în a treia zi, ..., (4-59x)km în a 60-a zi. $\Rightarrow 4 - 59x = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{59} \text{km}$

Lungimea de drum construită de a doua echipă este:

$$4 + 4 - \frac{3}{59} + 4 - 2 \cdot \frac{3}{59} + \dots + 4 - 59 \cdot \frac{3}{59} = 4 \cdot 60 - \frac{3}{59} (1 + 2 + \dots + 59)$$

$$= 4 \cdot 60 - \frac{3}{59} \cdot 59 \cdot 60 : 2 = 150 \text{km} \dots\dots\dots 3p.$$

.....
 Lungimea autostrăzii 120+150=270 km. 1p.

Subiectul 3.

Consider că pe $[BA - [AB]$ sunt situate k puncte notate M_k , iar pe $[AB - [AB]$ sunt situate $2013 - k$ puncte notate M_{2013-k} .

Notam cu S_1 suma distantelor de la A la cele 2013 puncte.

$$S_1 = AM_1 + AM_2 + \dots + AM_k + AM_{k+1} + AM_{k+2} + \dots + AM_{2013}$$

$$S_1 = AM_1 + AM_2 + \dots + AM_k + AB + BM_{k+1} + AB + BM_{k+2} + \dots + AB + BM_{2013} \dots 2p$$

$$S_1 = AM_1 + AM_2 + \dots + AM_k + BM_{k+1} + BM_{k+2} + \dots + BM_{2013} + (2013 - k) \cdot AB \dots 2p$$

Notam cu S_2 suma distantelor de la B la cele 2013 puncte.

$$S_2 = BM_1 + BM_2 + \dots + BM_k + BM_{k+1} + BM_{k+2} + \dots + BM_{2013} \text{ si analog}$$

$$S_2 = AM_1 + AM_2 + \dots + AM_k + BM_{k+1} + BM_{k+2} + \dots + BM_{2013} + k \cdot AB \dots 2p$$

$$\text{Daca } S_1 = S_2 \Rightarrow (2013 - k) \cdot AB = k \cdot AB \Rightarrow 2k = 2013 \text{ imposibil} \Rightarrow S_1 \neq S_2 \dots 1p$$

Subiectul 4.

$$a) - \sphericalangle BAM \equiv \sphericalangle CAM \equiv \sphericalangle CAP \equiv \sphericalangle PAD \dots 2p$$

$$- [AM] \equiv [AP] \dots 1p$$

$$- ME \perp AB, PQ \perp AD, ME = PQ \dots 1p$$

$$b) - MP \cap AC = \{O\}$$

$$- \triangle MOC \equiv \triangle POC (CC) \Rightarrow \sphericalangle MCO \equiv \sphericalangle PCO \dots 2p$$

$$- \triangle BAC \equiv \triangle DAC (ULU) \Rightarrow [AB] \equiv [AC] \dots 1p$$