

Olimpiada de matematică
Faza Zonală - 17 februarie 2017

Clasa a IX-a - Enunțuri

1. Fie $(a_n)_{n \geq 1}$ o progresie aritmetică cu termeni întregi. Se știe că printre termenii acestei progresii găsim exact trei pătrate perfecte. Suplimentar, aceste pătrate perfecte sunt consecutive.
- a) Demonstrați că rația progresiei este negativă;
- b) Determinați pe a_1 .

Supliment Gazeta Matematică

2. a) Demonstrați că oricare ar fi $x, y > 0$, are loc inegalitatea $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq x + y$;
- b) Fie $a, b, c > 0$ cu proprietatea $a + b + c = 2017$. Demonstrați că $\frac{a^3 + b^3}{ab} + \frac{b^3 + c^3}{bc} + \frac{c^3 + a^3}{ca} \geq 4034$.

3. Fie $r \geq 0$. Pentru orice numerele reale a, b , definim mulțimea

$$I(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - a| + |x - b| \leq r\}$$

- a) Dacă $r < |a - b|$, demonstrați că $I(a, b) = \emptyset$;
- b) Dacă $r \geq |a - b| > 0$, demonstrați că $I(a, b)$ este un interval închis și mărginit lungime r ;
- c) Mulțimea $I(a, b)$ conține un singur element dacă și numai dacă $a = b$ și $r = 0$.

Revista de Matematică din Hunedoara

4. Într-un plan α , se consideră punctele distincte A, B, C, D . Să se arate că următoarele afirmații sunt echivalente:
- a) Avem $C, D \in [AB]$, iar segmentele $[AB]$ și $[CD]$ au același mijloc;
- b) Pentru orice $M \in \alpha$, avem $MA + MB \geq MC + MD$.

Gazeta Matematică

NOTĂ

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.