



Olimpiada Națională de Matematică
Etapă locală – Vaslui, 16 februarie 2020
Clasa a XII-a

Problema 1. Calculați: a) $\int \frac{x^2 e^x}{(x+2)^2} dx, x \in (-1, \infty)$;

b) $\int_1^e \left(\frac{\ln x}{\ln x + 2} \right)^2 dx$.

Problema 2. Arătați că nu există funcții primitivabile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$, astfel încât pentru o primitivă oarecare F a lor, să existe egalitatea $F(x) \cdot F(1-x) = F(x^2), (\forall) x \in \mathbb{R}$.

Problema 3. Fie $(G, \cdot)$ un grup finit cu elementul neutru e . Spunem că un automorfism $f \in \text{Aut}(G)$ este fără puncte fixe dacă $\{x \in G, f(x) = x\} = \{e\}$. Arătați că dacă $f \in \text{Aut}(G)$ este fără puncte fixe, atunci $\{f(x) \cdot x^{-1}, x \in G\} = G$.

Problema 4. Fie $(G, \cdot)$ un grup și $a \in G$ fixat, cu proprietatea că există $f: G \rightarrow G$ astfel încât $f(x) \cdot f(a \cdot x) = x, (\forall) x \in G$.

a) Dacă $f(a) \cdot a = a \cdot f(a)$ să se arate că $f(a) \cdot f(a^{2^n}) = a^n, (\forall) n \in \mathbb{N}$.

b) Să se arate că $(f(a^2))^{-1} = f(a^{-1})$.

Notă: *Timpul de lucru este de 3 ore.*

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.