R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a IX-a

Barem de evaluare şi notare

PROBLEMA 1

Demonstraţi că sirul $(a_n)_{n\in N^*}$ *este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă:*

$$a_1+2a_2+2a_3+\quad +2a_{n-1}+a_n=(n-1)(a_1+a_n),\ \forall n\in N,\ n\geq 3.$$

<u>Soluţie:</u>

Demonstraţi că sirul $(a_n)_{n\in N^*}$ este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă:

$$a_1+2a_2+2a_3+\quad +2a_{n-1}+a_n=(n-1)(a_1+a_n),\ \forall n\in N,\ n\geq 3.$$

$"\Rightarrow"$ $(a_n)_{n\in N^*}$ progresie aritmetică, $a_1+2a_2+2a_3+...+2a_{n-1}+a_n=$

$=2(a_1+a_2+.....+a_n)-(a_1+a_n)=(a_1+a_n)n-(a_1+a_n)$ ....*2 punct*

$=(n-1)(a_1+a_n)$ ....*1 punct*

$"\Leftarrow"$Notăm $a_2-a_1=r$ si $P(n): a_n-a_{n-1}=4$, $n\geq 3$ ....*1 punct*

$a_1+2a_2+a_3=2(a_1+a_3)\Leftrightarrow a_3-a_2=a_2-a_1=r\Rightarrow a_1,a_2,a_3$ sunt in progresie aritmetică de rație, deci P(3) este adevarată... ....*1punct*

Fie $n\geq 3$. Presupunem *P(n)* adevarată, deci $a_n=a_1+(n-1)r$. Scădem egalitatea din ipoteza pentru *n* termeni din cea pentru *n*+1 termeni și obținem

$a_n+a_{n+1}=a_1+na_{n+1}-(n-1)a_n \Leftrightarrow a_n+a_{n+1}=a_n-(n-1)r+na_{n+1}-(n-1)a_n$
$\Leftrightarrow a_{n+1}=a_n+r$, deci *P(n+1)* este adevarată...................................*2 punct*

P(n) este adevarată $\forall n\in N, n\geq 3$, deci $(a_n)_{n\in N^*}$ este progresie aritmetică.

PROBLEMA 2

Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\{x\}-\{2014x\}=x$.

<u>Soluţie:</u>

Ecuaţia se scrie sub forma $\{2014x\}=-[x]$ ……………………….*1 punct*

Deoarece $\{2014x\} \in [0,1)$, rezultă că $[x] \in (-1,0]$ ....*1 punct*

Atunci $[x] = 0$, de unde $x \in [0,1)$ ....*1 punct*

Astfel $\{2014x\} = 0$, deci $2014x = k \in Z$, de unde $x = \dfrac{k}{2014}$ .... *2 puncte*

Soluţiile ecuaţiei sunt de forma $x = \dfrac{k}{2014}$, unde $k \in \{0,1,...,2013\}$.............. *2 puncte*

PROBLEMA 3

Arătaţi că:

a) $x^3 - 3x + 2 \geq 0, \forall x \in [0,\infty)$

b) Dacă $a,b,c \in (0,\infty)$ *şi* $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \leq 3$ *, atunci* $a^2 + b^2 + c^2 \geq 3$.

Soluţie:

a) $x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 - x - 2) = (x-1)^2(x+2) \geq 0,\ \forall x \geq 0$ cu egalitate pentru $x = 1$

.....*3 puncte*

b) $x^3 - 3x + 2 \geq 0$ rezultă $x^3 \geq 3 - \dfrac{2}{x},\ \forall x \in (0,+\infty)$.................................... *2 puncte*

deci $\begin{cases} a^2 \geq 3 - \dfrac{2}{a} \\ b^2 \geq 3 - \dfrac{2}{b} \\ c^2 \geq 3 - \dfrac{2}{c} \end{cases}$ .... *1 punct*

de unde prin adunare $a^2 + b^2 + c^2 \geq 9 - 2\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right) \geq 9 - 2 \cdot 3 = 3$ .... *1 punct*

PROBLEMA 4

Pe cercul $\mathcal{C}$ de centru O se consideră punctele distincte A, B, C. Demonstraţi că dacă $|\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA}|$ *atunci* $AB = BC = CA$.

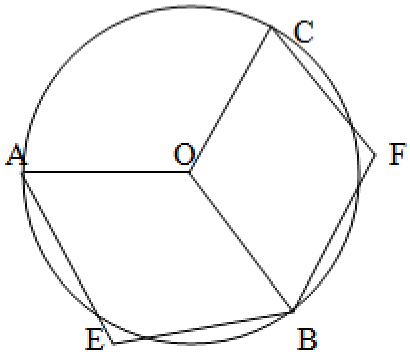
Soluţie:

Avem $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OE}$; $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OF}$ (se construiesc paralelogramele OAEB şi OBFC (sunt romburi))$\Rightarrow OE = OF$......... ....*3 puncte*

$\Rightarrow \Delta OBF \equiv \Delta OBE\ (L.L.L) \Longrightarrow \measuredangle EOB \equiv \measuredangle FOB \Longrightarrow \measuredangle AOB \equiv \measuredangle BOC \Longrightarrow AB = BC$

…………………………………………………………………………….3 *puncte*

Analog se arată că AB=AC deci rezultă concluzia……………………….. *1 punct*



R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a X-a

PROBLEMA 1

Rezolvaţi ecuaţia $2^{2^x-1}-1=\log_2(1+x)$.

Soluţie:

Fie $f:\mathbf{R}\to(-1,\infty),\ f(x)=2^x-1$.

Ecuaţia se scrie: $f(f(x))=f^{-1}(x)$, de unde $f(f(f(x)))=x$. ....2 puncte

Dacă $f(x)<x \Rightarrow f(f(x))<f(x)$ (f este crescătoare), de unde $f(f(x))<x$.
Rezultă $f(f(f(x)))<f(x)<x$, deci $f(f(f(x)))<x$, imposibil, pt că $f(f(f(x)))=x$.
Deci inegalitatea $f(x)<x$ este imposibilă.................................2 puncte

Dacă $f(x)>x \Rightarrow f(f(x))>f(x)>x$, de unde $f(f(x))>x$ şi de aici
$f(f(f(x)))>f(x)>x$, deci $f(f(f(x)))>x$, imposibil.
Rezultă deci că $f(x)=x,\ \forall\, x\in\mathbf{R}$, deci ecuaţia din enunţ este echivalentă cu $2^x-1=x$.
........................2 puncte

Funcţia $f:\mathbf{R}\to(-1,\infty),\ f(x)=2^x-1$ este convexă, iar funcţia $g(x)=x$ este liniară.
Rezultă că ecuaţia $f(x)=g(x)$ are cel mult 2 soluţii.
Numerele 0 şi 1 verifică ecuaţia, deci $S=\{0,1\}$ ....1 punct.

PROBLEMA 2

Fie funcţia $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=2\sin 2x+8(\sin x+\cos x)+3$.

Determinaţi imaginea funcţiei f.

Soluţie:

Notăm $\sin x+\cos x=t\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$ şi prin ridicare la pătrat:
$1+\sin 2x=t^2$, de unde $\sin 2x=t^2-1$.
Rezultă că $f(x)=g(t)=2(t^2-1)+8t+3=2t^2+8t+1,\ t\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$

…………………………………………3 puncte

Avem: $g\left(-\sqrt{2}\right)=4-8\sqrt{2}+1=5-8\sqrt{2}$

$g\left(\sqrt{2}\right)=4+8\sqrt{2}+1=5+8\sqrt{2}$

Funcţia $h:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ h(x)=2x^2+8x+1$ are minimul $m=h\left(-\frac{8}{4}\right)=h(-2)=-7$ ...3 puncte

dar $-2\notin\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$. Deci $\operatorname{Im} f=\left[5-8\sqrt{2},5+8\sqrt{2}\right]$ ……………………………1 punct

PROBLEMA 3

Fie $n\geq 2$ număr natural şi a,b două numere reale pozitive. Să se arate că $n\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\leq 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+n-2\right)$.

<u>Soluţie:</u>

Scriem $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1}$ de $(n-2)$ ori 1 ....*1 punct*

Din inegalitatea mediilor ($m_g\leq m_a$) avem

$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\ldots\cdot 1}\leq\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a}+1+1+\ldots+1}{n}$ ....*3 puncte*

deci $\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\ldots\cdot 1}\leq\frac{2\sqrt{a}+(n-2)}{n}$ ....*1 punct*

Aşadar $\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\leq\frac{2\sqrt{a}+2\sqrt{b}+2(n-2)}{n}$ ....*1 punct* de unde obţinem

$n\left(\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}\right)\leq 2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+n-2\right)$........................*1 punct*

PROBLEMA 4

Notăm cu M,N,P,Q,R şi S mijloacele segmentele $(BC),(CD),(DE),(EA),(MP)$ respectiv (NQ) dintr-un pentagon convex $ABCDE$. Arătaţi că $RS \parallel AB$.

<u>Soluţie:</u>

Fie $A(a),B(b),C(c),D(d)$ şi $E(e)$ afixele vârfurilor pentagonului.............*1 punct*

Cum M,N,P,Q,R şi S mijloacele segmentele $(BC),(CD),(DE),(EA),(MP)$ respectiv (NQ) atunci $M\left(\frac{c+b}{2}\right),N\left(\frac{d+c}{2}\right),P\left(\frac{e+d}{2}\right),Q\left(\frac{e+a}{2}\right)$ ....*1,5 puncte* şi

$R\left(\frac{e+d+c+b}{4}\right),S\left(\frac{e+a+d+c}{4}\right)$...............................*1,5 puncte*

Pentru a demonstra că $RS \parallel AB$ verificăm dacă $\frac{b-a}{s-r} \in R^*$ unde $s = \frac{e+a+d+c}{4}$ şi $r = \frac{e+d+c+b}{4}$ ....*1 punct*

Prin calcul obţinem $\frac{b-a}{s-r} = \frac{b-a}{\frac{a-b}{4}} = -4 \in R^*$ ....*2 puncte* deci $RS \parallel AB$

R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a XI-a

Barem de evaluare şi notare

PROBLEMA 1

Fie $X \in M_3(C)$, $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$. *Să se calculeze* $X^n, n \in N$.

Soluţie:

X se descompune $X = A + B$, unde $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = aI_3$ şi $B = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Se observă că

$A \cdot B = aI_3 \cdot B = B \cdot aI_3 = B \cdot A$ ....*1 punct*

$X^n = (A+B)^n = C_n^0 A^n + C_n^1 A^{n-1} B + ... + C_n^n B^n$ .... *1 punct*

$A = aI_3,\ A^2 = a^2 I_3, ..., A^n = a^n I_3,\ \forall n \in N$ .... *1 punct*

$$B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O_3 \Rightarrow B^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \forall n \in N\ \ n \geq 3$$

Deci $X^n = C_n^0 A^n + C_n^1 A^{n-1} B + C_n^2 A^{n-2} B^2 + O_3$, $X^n = a^n I_3 + n \cdot a^{n-1} \cdot B + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} B^2$

..........................*1 punct*

După înlocuire se obţine $X^n = \begin{pmatrix} a^n & na^{n-1}b & na^{n-1}c + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$ .... *2 puncte*

PROBLEMA 2

Notăm cu $M = \{X \in M_2(R) \mid X^2 - X - 6I_2 = O_2\}$. *Demonstraţi că:*

a) Dacă $A \in M \Rightarrow$ *A este inversabilă şi* $A^{-1} = \frac{1}{6}(A - I_2)$

b) Dacă A, B $\in M \Rightarrow A^n - B^n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n + 3^n}{5} \cdot (A - B)$

Soluţie:

a) $A \in M \Rightarrow A(A-I_2) = 6I_2 \Rightarrow \det A \det(A-I_2) = 6 \Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow$ A este inversabilă

………………..*2 puncte*

b) $A^2 - A - 6I_2 = O_2 \mid A^{-1} \Rightarrow A - I_2 - 6A^{-1} = O_2$ $A^{-1} = \frac{1}{6}(A - I_2)$ ………*2 puncte*

b) Dacă $A, B \in M \Rightarrow A^2 = A + 6 \cdot I_2$

$B^2 = B + 6 \cdot I_2$

Procedăm prin inductie :

- Se verifică uşor P(1) şi P(2) …………………….. *1 punct*
- P (n) $\rightarrow$ P (n+1)

$A^{n+1} = A^{n-1} \cdot A^2 = A^{n-1}(A + 6 \cdot I_2) = A^n + 6 \cdot A^{n-1}$. Analog

$B^{n+1} = B^n + 6 \cdot B^{n-1}$

Deci $A^{n+1} - B^{n+1} = (A^n - B^n) + 6 \cdot (A^{n-1} - B^{n-1}) =$ …………..*2 puncte*

$$= \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^n + 3^n}{5} \cdot (A - B) + 6 \cdot \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{n-1} + 3^{n-1}}{5} \cdot (A - B) = \frac{(-1)^{n+2} \cdot 2^{n+1} + 3^{n+1}}{5} \cdot (A - B)$$

PROBLEMA 3

a) Să se determine $m \in R$, *astel încât* $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{(m-1)^2 \cdot x^2 + 1}}{3x + 2} = -1$.

b) calculaţi limita: $\lim_{x \to 0} \frac{\ln\left(x^n + x^{n-1} + ... + x + 1\right)}{nx}$, $n \in N^*$.

Soluţie:

a)

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{(m-1)^2 \cdot x^2 + 1}}{3x + 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{|x| \cdot \sqrt{(m-1)^2 + \frac{1}{x^2}}}{3x + 2} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-x \cdot \sqrt{(m-1)^2 + \frac{1}{x^2}}}{x\left(3 + \frac{2}{x}\right)} = \frac{-|m-1|}{3}$$ …………

…………………………………………………………………2 *puncte*

Obţinem: $\frac{-|m-1|}{3} = -1 \Rightarrow |m-1| = 3$, de unde

$m \in \{-2, 4\}$……………………………………………..*1 punct*

b) Limita se poate scrie sub forma:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left[1+\left(x+x^2+...+x^n\right)\right]}{x+x^2+...+x^n}\cdot\frac{x+x^2+...+x^n}{nx}=1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2+...+x^n}{nx}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left(1+x+x^2+...+x^{n-1}\right)}{nx}=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+x^2+...+x^{n-1}}{n}=\frac{1}{n}$$

……………………………………………………………………*4 puncte*

Observaţie: s-a folosit $\lim_{x\to\alpha}\frac{\ln\left[1+u(x)\right]}{u(x)}=1$, pentru $u(x)\to 0$.

PROBLEMA 4

Fie şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ *definit prin* $a_1 = 1$ *şi* $a_{n+1}=\frac{a_n}{1+na_n}$, $n\geq 1$. *Să se calculeze*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+...+\frac{n}{a_n}\right).$$

Soluţie:

Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ are termenii strict pozitivi. $a_n>0\Rightarrow(a_n)_{n\geq 1}$ şir mărginit inferior

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{1+na_n}<1\ \Rightarrow$ şirul este strict descrescător. Aşadar $(a_n)_{n\geq 1}$ este şir convergent

....*2 puncte*

Fie $l=\lim_{n\to\infty}a_n$.

Dacă $l>0$, atunci $\lim_{n\to\infty}(1+na_n)=\infty\ \Rightarrow\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{1+na_n}=0\ \Rightarrow l=0$, fals.

Prin urmare $\lim_{n\to\infty}a_n=0.$

....*1 punct*

Aplicăm succesiv lema Stolz-Cesaro:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_2}+...+\frac{n}{a_n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{a_{n+1}}}{(n+1)^4-n^4}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\frac{1+na_n}{a_n}}{\left[(n+1)^2-n^2\right]\left[(n+1)^2+n^2\right]}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_n}+n}{2n^2+2n+1}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+2n+1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_n}+n}{n^2}=$$ ……….....*2 puncte*

$$\overset{C-S}{=}\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}+1}{(n+1)^2-n^2}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1+na_n}{a_n}-\frac{1}{a_n}+1}{2n+1}=\frac{1}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}=\frac{1}{8}.$$ ....*2 puncte*

R O M Â N I A
MINISTERUL EDUCAŢIEI NAŢIONALE
INSPECTORATUL ŞCOLAR AL JUDEŢULUI SĂLAJ
Loc. Zalău, str. Unirii, nr. 2, Tel: 0260-661391, Fax.: 0260-619190
E-mail: isjsalaj@isj.sj.edu.ro

SOCIETATEA DE ŞTIINŢE MATEMATICE – filiala SĂLAJ

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 14 februarie 2014

Clasa a XII-a

Barem de evaluare şi notare

PROBLEMA 1

Fie $A(m)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ m & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$ *şi* $G=\{A(m)|m\in\mathbb{Z}\}$.

a) *Arătaţi că* $(G,\cdot)$ *este grup*
b) *Arătaţi că* $(G,\cdot)$ *este izomorf cu grupul* $(Z,+)$
c) *Rezolvaţi ecuaţia* $(A(m))^n=A(5), m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}^*$.

<u>Soluţie:</u>

a) $A(m)\cdot A(k)=A(m+k+1)$ **..***1punct*
Înmulţirea matricelor este asociativă *1punct*

Elementul neutru este $e=A(-1)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\in G$ **.......................................***1punct*

Simetricul lui $A(m)$ este $A(-m-2)$ *1punct*

b) Aplicaţia $f:G\to\mathbb{Z}$, definită prin $f(A(m))=m+1$ este
1) bijectivă *1punct*
2) morfism *1punct*

c) Avem $f(A(m_1)A(m_2)...A(m_k))=f(A(m_1))+f(A(m_1))+\quad+f(A(m_1))$,
pentru orice $m_1,m_2,...,m_k\in\mathbb{Z}$; în particular $f(A^k(m))=kf(A(m))$ *0.5puncte*

Deci $nf(A(m))=f(A(5))$ sau $n(m+1)=6$, de unde soluţiile
$(1,5),(2,2),(3,1),(6,0)$ (n este prima componentă) **..** *0.5puncte*

PROBLEMA 2

Arătaţi că funcţia $f : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, *definită prin* $f(x) = \begin{cases} \sin\left(ax + \dfrac{b}{x^2}\right), & \text{dacă } x \neq 0 \\ 0 & \text{, dacă } x = 0 \end{cases}$

are primitive pe ***R****, pentru orice* $a, b \in \mathrm{R}$.

Soluţie:

Fie $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$, $g(x) = \begin{cases} x^3 \cos\left(ax + \dfrac{b}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$ …………………………………...*2puncte*

$\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \lim\limits_{x \to 0} x^3 \cos\left(ax + \dfrac{b}{x^2}\right) = 0$, deci g este continuă în 0, deci continuă pe R ……*1punct*

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x^2 \cos\left(ax + \dfrac{b}{x^2}\right) = 0$, deci g este derivabilă în 0, deci pe R ……*1punct*

Pentru $x \neq 0$, $g'(x) = 3x^2 \cos\left(ax + \dfrac{b}{x^2}\right) - ax^3 \sin\left(ax + \dfrac{b}{x^2}\right) + 2b \sin\left(ax + \dfrac{b}{x^2}\right)$ ………*1punct*

Deci $g'(x) = \begin{cases} 3x^2 \cos\left(ax + \dfrac{b}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} - a \begin{cases} x^3 \sin\left(ax + \dfrac{b}{x^2}\right), & x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} + 2bf(x)$ …………*1punct*

Dacă $b = 0$, atunci f este continuă pe R, deci are primitive, iar dacă $b \neq 0$,
din egalitatea $g' = u - av + 2bf$ rezultă că f are primitive. …………………………..*1punct*

PROBLEMA 3

Determinaţi primitivele funcţiei $f : R \to R$, $f(x) = \dfrac{x(x-1)(x-2)}{(x^2 - 2x)^4 + 4}$

Soluţie:

$f(x) = \dfrac{(x-1)(x^2 - 2x)}{(x^2 - 2x)^4 + 4}$ ……………………………………………………………*2 puncte*

Notăm $x^2 - 2x = t \Rightarrow 2(x-1)dx = dt \Rightarrow (x-1)dx = \dfrac{dt}{2}$ ……………………………..*1 punct*

Așadar $F(x) = \int f(x)dx = \int \dfrac{t}{t^4 + 4} \cdot \dfrac{1}{2} dt$ ……………………………………………..*1 punct*

Notăm $t^2 = u \Rightarrow 2tdt = du \Rightarrow tdt = \dfrac{du}{2}$ ……………………………………………*1 punct*

$F(u) = \dfrac{1}{4} \int \dfrac{1}{u^2 + 4} du = \dfrac{1}{8} arctg \dfrac{u}{2} + C$ ……………………………………………..*1 punct*

$F(x) = \dfrac{1}{8} arctg \dfrac{(x^2 - 2x)^2}{2} + C$ ………………………………………………………..*1 punct*

PROBLEMA 4

Fie $(G,\cdot)$ *un grup și* $f: G \to G$ *o funcție injectivă astfel încât* $f(x^2 \cdot f(y)) = x^{-1} \cdot f(xy), \forall x, y \in G$. *Să se arate că* $x^2 = e, \forall x \in G$.

Soluţie:

Dacă în relația din enunț luăm $x = e$ (elementul neutru) avem $f\big(f(y)\big) = f(y)$ *2puncte*

Cum f este injectivă rezultă $f(y) = y, \forall y \in G$ deci $f = 1_G$ (funcția identică a mulțimii *G)*..............................*1punct*

Avem $f\big(x^2 \cdot f(y)\big) = x^2 \cdot f(y) = x^2 \cdot y$...*1punct*

și $x^{-1} \cdot f(xy) = x^{-1} \cdot xy$...*1punct*

iar de aici $x^2 \cdot y = x^{-1} \cdot xy \Rightarrow x^2 \cdot y = y \Rightarrow x^2 = e$...*2puncte*