



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ-17.februarie.2018

Clasa a X-a

SUBIECTUL I (7p)

Se consideră numerele a, b, c, d astfel încât $a > c > b > 0$ și $ab = cd$.

Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbb{R}$, $a^x + b^x \geq c^x + d^x$.

SUBIECTUL II (7p)

Să se arate că nu există funcții injective $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, care pentru orice număr real x , satisfac relația:

$$f(3^x) + f(5^x) = 8.$$

SUBIECTUL III (7p)

Determinați numerele $a, b, c > 0$ cu proprietatea că:

$$a^{\log_3 a} \cdot b + b^{\log_3 b} \cdot c + c^{\log_3 c} \cdot a = \sqrt[4]{27}.$$

SUBIECTUL IV (7p)

Fie $z_1, z_2, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ astfel încât: $|z_1| = |z_2| = \dots = |z_n| = 1$ și $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$.

a) Demonstrați că: $|z - z_1|^2 + |z - z_2|^2 + \dots + |z - z_n|^2 = n(|z|^2 + 1)$, pentru orice $z \in \mathbb{C}$.

b) Arătați că dacă $|z - z_1| \leq 1, |z - z_2| \leq 1, \dots, |z - z_n| \leq 1$, atunci: $z = 0$.

Prelucrare Gazeta Matematică

NOTĂ: Timp de lucru: 3 ore. Toate subiectele sunt obligatorii.