

Barem de corectare OLM Clasa a IX-a, 2013

1. Din $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geq 9, (\forall) a, b, c > 0$ obținem.....(2p)

$$\sum \frac{1}{\sqrt{x^2+yz+3}} \geq \frac{9}{\sqrt{x^2+yz+3}+\sqrt{y^2+zx+3}+\sqrt{z^2+xy+3}} \dots\dots\dots(1p)$$

Este suficient să arătăm că: $\sqrt{x^2+yz+3}+\sqrt{y^2+zx+3}+\sqrt{z^2+xy+3} \leq 9 \dots\dots\dots(1p)$

$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c} \leq \sqrt{3(a+b+c)}, (\forall) a, b, c \geq 0$ și $xy+yz+zx \leq x^2+y^2+z^2 \leq 9$, de unde.....(1p)

$$\sqrt{x^2+yz+3}+\sqrt{y^2+zx+3}+\sqrt{z^2+xy+3} \leq \sqrt{3(x^2+y^2+z^2+xy+yz+zx+9)} \leq 9 \dots\dots\dots(2p)$$

2. $P(n): 5^{2n+1} 2^{n+2} + 3^{n+2} 2^{2n+1} : 19; P(0): 38 : 19$, adevărat.....(2p)

Pentru $n \geq 0$ presupunem $P(n)$ adevărată, deci $5^{2n+1} 2^{n+2} + 3^{n+2} 2^{2n+1} = 19k, k \in N$ și.....(1p)

$$5^{2n+1} 2^{n+2} = -3^{n+2} 2^{2n+1} + 19k, k \in N \dots\dots\dots(1p)$$

$$5^{2n+3} 2^{n+3} + 3^{n+3} 2^{2n+3} = 50 \cdot 5^{2n+1} 2^{n+2} + 3^{n+3} 2^{2n+3} = 50(19k - 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}) + 3^{n+3} \cdot 2^{2n+3} =$$

$$= 19 \cdot 50k - 50 \cdot 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} + 3^{n+3} \cdot 2^{2n+3} = 19 \cdot 50k - 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1} (50 - 12) : 19 \Rightarrow P(n+1) \text{ adev} \dots\dots\dots(2p)$$

$\Rightarrow P(n)$ adevărată pentru orice n natural.....(1p)

$$3. x_p = x_{p+1} \Leftrightarrow a^{2p} + b^{2p} + c^{2p} = a^{2p+2} + b^{2p+2} + c^{2p+2} \Rightarrow \sum a^{2p} (a^2 - 1) = 0 \dots\dots\dots(2p)$$

$$x_{p+1} = x_{p+2} \Leftrightarrow \sum a^{2p+2} (a^2 - 1) = 0 \dots\dots\dots(2p)$$

$$\text{Scăzând relațiile se deduce că } \sum a^{2p} (a^2 - 1)^2 = 0 \dots\dots\dots(2p)$$

$\Rightarrow a, b, c \in \{-1, 0, 1\}$ de unde rezultă concluzia.....(1p)

$$4. \text{ a) } \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 3\overrightarrow{PO} \dots\dots\dots(3p)$$

b) Ducem prin P paralele la laturile triunghiului și notăm cu M, N, Q, R, S, T intersecțiile acestora cu laturile $(AB), (BC)$, respectiv (CA) . Triunghiurile PMN, PQR, PST sunt echilaterale și patruleterele $PNBQ, PRCS, PTAM$ sunt paralelograme.....(2p)

$$\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{PE} + \overrightarrow{PF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PN}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{PR}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{PS} + \overrightarrow{PT}) = \dots\dots\dots(1p)$$

$$= \frac{1}{2}[(\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{PT}) + (\overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PQ}) + (\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{PS})] = \frac{1}{2}(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{PO} \dots\dots\dots(1p)$$