Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galaţi

16 februarie 2020

Clasa a XI-a

Problema 1.

Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} x^2 \cdot \left[(a\cdot b)^{\frac{1}{x}} - a^{\frac{1}{x+1}} \cdot b^{\frac{1}{x+2}} \right]$, unde $a,\ b>0,\ a,\ b\neq 1.$

Problemă propusă de Mariana Coadă, profesor Galați

Problema 2.

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ cu $x_{n+2}=8\cdot x_{n+1}-15\cdot x_n,\ n\in\mathbb{N},\ n\geq 1$ şi $x_1=2,\ x_2=1.$

a) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} x_n.$

b) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1}}{5\cdot x_n}$

c) Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{x_{n+1}}{5\cdot x_n}\right)^{\frac{x_n}{n^{2020}}}.$

Problemă propusă de Gelu Daniel Coadă, profesor Galaţi

Problema 3.

Fie $n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq 2$

Să se rezolve ecuaţia matriceală $\mathrm{A}^n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, unde $\mathrm{A}\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R}).$

Problemă selectată de Carmen Necula-Vijelie, profesor Galaţi

Problema 4.

Fie $A, B\in\mathrm{M}_n(C),\ n\in\mathbb{N}^*,\ n\geq 2,$ două matrice inversabile astfel încât $B\neq \mathrm{I}_n,$

$A\cdot B\cdot A^{-1}=B^2$ şi $A^m=I_n$, unde $\mathrm{m}\in\mathbb{N}^*$ fixat, cu proprietatea că 2^m-1 este număr prim.

Demonstraţi că:

a) $B^{2^p}=A^p\cdot B\cdot A^{-p},\ (\forall)\ p\in\mathbb{N}^*$. (S-a notat $\mathrm{A}^{-p}=\left(A^{-1}\right)^p$).

b) Există $\mathrm{k}\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $B^k=I_n$ şi determinaţi cel mai mic număr natural nenul k cu această proprietate.

Problemă propusă de Mariana Coadă, profesor Galați

Notă: Toate problemele sunt obligatorii
Timp efectiv de lucru 3 ore
Fiecare problemă se notează cu puncte de la 0 la 7