# Olimpiada de matematică

etapa locală

16.02.2014

## Clasa a X-a

**1.** Rezolvaţi în $\mathbb{R}$ sistemul $\begin{cases} 10^x - y = 6 \\ \sqrt[3]{x+7} + \log_3(y-1) = 3 \end{cases}$.

*G.M. supliment, octombrie 2013*

**Barem:**

| | |
|---|---|
| **1 p** | $\begin{cases} y = 10^x - 6 \\ \sqrt[3]{x+7} + \log_3(10^x - 7) = 3 \end{cases}$ |
| **2 p** | Funcţia f(x) = $\sqrt[3]{x+7} + \log_3(10^x - 7)$ este strict crescătoare , deci injectivă pe $(\lg 7, \infty)$ |
| **2 p** | Cum f(x) = f(1) $\Rightarrow x = 1$ soluţie unică a ecuaţiei $\sqrt[3]{x+7} + \log_3(10^x - 7) = 3$. |
| **2 p** | Soluţia sistemului este $x = 1$ , $y = 4$ |
| **7 p** | **TOTAL** |

**2.** Fie $a, b, c \in (1, \infty)$ . Arătaţi că $\sqrt{2(\ln^2 a + \ln^2 b) + 5\ln a \cdot \ln b} + \sqrt{2(\ln^2 b + \ln^2 c) + 5\ln b \cdot \ln c} + \sqrt{2(\ln^2 c + \ln^2 a) + 5\ln c \cdot \ln a} \leq 3\ln abc$.

*Bud Adrian, Negreşti Oaş*

**Barem:**

| | |
|---|---|
| **1p** | $\sqrt{2(\ln^2 a + \ln^2 b) + 5\ln a \cdot \ln b} = \sqrt{(2\ln a + \ln b)(\ln a + 2\ln b)}$ |
| **2p** | $\sqrt{(2\ln a + \ln b)(\ln a + 2\ln b)} \leq \frac{2\ln a + \ln b + \ln a + 2\ln b}{2} = \frac{3}{2}(\ln a + \ln b) = \frac{3}{2}\ln ab \ (1)$ |
| **1p** | $\sqrt{2(\ln^2 b + \ln^2 c) + 5\ln b \cdot \ln c} \leq \frac{3}{2}\ln bc \ \ (2)$ |
| **1p** | $\sqrt{2(\ln^2 c + a) + 5\ln c \cdot \ln a} \leq \frac{3}{2}\ln ca \ (3)$ |
| **1p** | Prin adunarea relatiilor $(1), (2), (3)$ se obtine $\sqrt{2(\ln^2 a + \ln^2 b) + 5\ln a \cdot \ln b} + \sqrt{2(\ln^2 b + \ln^2 c) + 5\ln b \cdot \ln c} + \sqrt{2(\ln^2 c + \ln^2 a) + 5\ln c \cdot \ln a} \leq \frac{3}{2}\ln ab + \frac{3}{2}\ln bc + \frac{3}{2}\ln ca$ |
| **1p** | $\frac{3}{2}\ln ab + \frac{3}{2}\ln bc + \frac{3}{2}\ln ca = \frac{3}{2}(\ln a^2b^2c^2) = \frac{3}{2}\ln(abc)^2 = 3\ln abc$ |
| **7 p** | **TOTAL** |

**3.** a) Arătaţi că există $a,b\in R$ astfel încât $\sin^3 x = a\sin x + b\sin 3x,\ \forall x\in R.$

b) Să se rezolve în R ecuaţia: $2^{\sin 3x} - 8^{\sin x} = \sin^3 x.$

*Traian Tămîian , GM.2/2013*

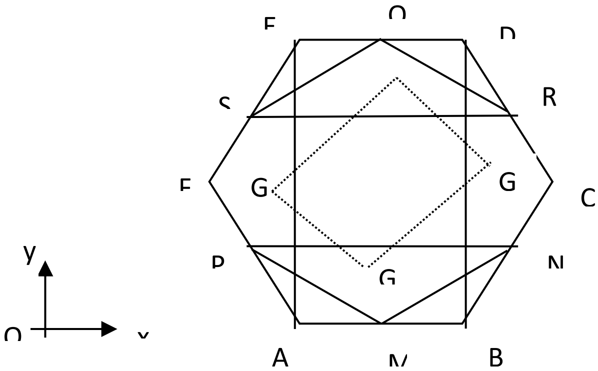
**Barem:**

| | |
|---|---|
| **1 p** | a)Din formula $\sin 3x = \sin x(3-4\sin^2 x)\ \Rightarrow\ \sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4} \Leftrightarrow$ |
| **2 p** | $\sin^3 x = \dfrac{3}{4}\sin x - \dfrac{1}{4}\sin 3x,$ de unde rezultă că există $a=\dfrac{3}{4}$ şi $b=-\dfrac{1}{4}$ astfel încât $\sin^3 x = a\sin x + b\sin 3x$ |
| **2 p** | b ) Din a) rezultă formula $\sin^3 x = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4}$ (1) , valabilă $\forall x\in R.$ Folosind (1) ecuaţia se scrie $2^{\sin 3x} - 2^{3\sin x} = \dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4} \Leftrightarrow 2^{\sin 3x} + \dfrac{\sin 3x}{4} = 2^{3\sin x} + \dfrac{3\sin x}{4}$ (2) |
| **1 p** | Funcţia $f: R\to R,\ f(t) = 2^t + \dfrac{t}{4}$ este strict crescătoare şi deci este şi injectivă. Ecuaţia (2) se scrie $f(\sin 3x) = f(3\sin x)$ şi cum f este injectivă rezultă că $\sin 3x = 3\sin x$ (3) |
| **1 p** | Folosind formula (1) ,ecuaţia (2) se scrie $\dfrac{3\sin x - \sin 3x}{4} = 0 \Leftrightarrow \sin^3 x = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow$ $x = k\pi, k\in Z.$ Mulţimea soluţiilor ecuaţiei date este $S=\{k\pi \mid k\in Z\}.$ |
| **7 p** | **TOTAL** |

**4.** Fie M,N,P,Q,R,S respectiv mijloacele laturilor [AB],[BC],[AF],[DE],[CD],[EF] ale hexagonului convex ABCDEF. Dacă $G_1, G_2, G_3, G_4$ sunt respectiv centrele de greutate ale triunghiurilor MNP, BCD, QRS, AEF, arătaţi că patrulaterul $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram.

*Traian Tămîian, Carei*

**Barem:**

| | |
|---|---|
| **1 p** | Considerăm originea sistemului în O şi notăm cu litere nici corespunzătoare afixele punctelor considerate.   |
| **2 p** | Avem $g_1 + g_3 = \dfrac{m+n+p}{3} + \dfrac{q+r+s}{3} = \dfrac{\frac{a+b}{2} + \frac{b+c}{2} + \frac{a+f}{2}}{3} + \dfrac{\frac{d+e}{2} + \frac{d+c}{2} + \frac{e+f}{2}}{3} =$ $= \dfrac{2a+2b+2c+2d+2e+2f}{6}$, |
| **2 p** | de unde $g_1 + g_3 = \dfrac{a+b+c+d+e+f}{3}$ (1) <br> $g_2 + g_4 = \dfrac{b+c+d}{3} + \dfrac{a+e+f}{3} = \dfrac{a+b+c+d+e+f}{3}$ (2) |
| **2 p** | Din relaţiile (1) şi (2) rezultă că $g_1 + g_3 = g_2 + g_4$ şi deci $G_1G_2G_3G_4$ este paralelogram. |
| **7 p** | **TOTAL** |

*Notă: Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.*