OLIMPIADA DE MATEMATICĂ OLT

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013 - Clasa a IX-a

Problema 1. Rezolvaţi ecuaţia $13\{x\}^2-1013x+2013\{x\}=0$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracţionară a numărului x.

Manuela Stroie şi Iulian Stroie, Balş

Problema 2. În planul paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele P şi Q astfel încât $\overrightarrow{DP}=p\cdot\overrightarrow{DC}$ şi $\overrightarrow{BQ}=q\cdot\overrightarrow{BC}$, unde $p,q\in\mathbb{R}$.
Arătaţi că punctele A, P şi Q sunt coliniare dacă şi numai dacă $pq=1$.

Titu Vîrban, Caracal

Problema 3. Fie progresiile aritmetice $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$. Arătaţi că şirul $(z_n)_{n\geq 1}$, definit prin $z_n=x_n\cdot y_n$, este o progresie aritmetică dacă şi numai dacă cel puţin una dintre progresiile $(x_n)_{n\geq 1}$ sau $(y_n)_{n\geq 1}$ este constantă.

Dan Brânzei

Problema 4. Fie H ortocentrul şi O centrul cercului circumscris triunghiului ABC. Se notează cu O_a, O_b, O_c centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor HBC, HCA, respectiv HAB.
Arătaţi că $\overrightarrow{OO_a}+\overrightarrow{OO_b}+\overrightarrow{OO_c}=2\overrightarrow{OH}$.

Costel Anghel, Scorniceşti

Problema 1. Avem $x=[x]+\{x\}\Rightarrow 13\{x\}^2+1000\{x\}=1013[x]$ .... (1p)

$\{x\}\in[0,1)\Rightarrow 13\{x\}^2+1000\{x\}\in[0,1013)\Rightarrow 1013[x]\in[0,1013)$ .... (2p)

Din $[x]\in\mathbb{Z}$ şi din relaţia anterioară rezultă $[x]=0$ .... (2p)

Notând $\{x\}=t$, rezultă $13t^2+1000t=0\Rightarrow t_1=0\Rightarrow x=0$ .... (1p)

$t_2=-\frac{1000}{13}\notin[0,1)$ nu convine .... (1p)

Problema 2. Avem $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DP}=\overrightarrow{AD}+p\cdot\overrightarrow{DC}=p\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$ .... (2p)

şi $\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BQ}=\overrightarrow{AB}+q\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+q\cdot\overrightarrow{AD}$ .... (2p)

Punctele A, P şi Q sunt coliniare dacă şi numai dacă vectorii $\overrightarrow{AP}$ şi $\overrightarrow{AQ}$ sunt coliniari, ceea ce este revine la faptul că vectorii $\overrightarrow{AP}$ şi $\overrightarrow{AQ}$ au coordonatele proporţionale în descompunerea după direcţiile necoliniare $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{AD}$ .... (2p)

Ca urmare, punctele A, P şi Q sunt coliniare dacă şi numai dacă $\frac{p}{1}=\frac{1}{q}$, adică $pq=1$ .... (1p)

Problema 3. Dacă progresia $(y_n)_{n\geq 1}$ este constantă, se constată că $(z_n)_{n\geq 1}$ este progresie aritmetică .... (2p)

Pentru implicaţia inversă, ne restrângem atenţia la trei termeni consecutivi ai fiecărei progresii: $(a-r,a,a+r)$, respectiv $(c-q,c,c+q)$. Pentru ca produsele să fie în progresie aritmetică, trebuie să avem $(a-r)(c-q)+(a+r)(c+q)=2\cdot ac$, ceea ce revine imediat la $r\cdot q=0$, de unde $r=0$ sau $q=0$, adică concluzia .... (5p)

Problema 4. Punctul A este ortocentrul triunghiului BCH .... (2p)

Din relaţia lui Sylvester, rezultă că $\overrightarrow{O_aA}=\overrightarrow{O_aB}+\overrightarrow{O_aC}+\overrightarrow{O_aH}$, deci $\overrightarrow{O_aB}+\overrightarrow{O_aC}=\overrightarrow{O_aA}-\overrightarrow{O_aH}=\overrightarrow{HA}$

Dar $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}$, de unde $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AH}$, deci $\overrightarrow{O_aB}+\overrightarrow{O_aC}=-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$.

De aici rezultă că $\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OO_a}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OO_a}=-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}$, adică $\overrightarrow{OO_a}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ .... (4p)

Analog obţinem $\overrightarrow{OO_b}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}$ şi $\overrightarrow{OO_c}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, iar prin adunarea acestor trei relaţii analoage rezultă: $\overrightarrow{OO_a}+\overrightarrow{OO_b}+\overrightarrow{OO_c}=2(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})=2\overrightarrow{OH}$ .... (1p)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ OLT

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013 – Clasa a X-a

Problema 1. Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia

$$\sqrt[3]{3\cdot 2^x-6}+\sqrt[3]{2\cdot 2^x-4}=\sqrt[3]{3\cdot 2^x-4}+\sqrt[3]{2\cdot 2^x-6}.$$

B.T.S.

Problema 2. Se consideră numerele $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, cu $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$, astfel încât $z_1^2+z_2^2+z_3^2=0$.

a) Demonstraţi că $|z_1+z_2+z_3| \in \mathbb{N}$.

b) Determinaţi numerele date dacă $z_1 \cdot z_2 = 1$ şi $z_3 \in \mathbb{R}$.

Iacob Didraga

Problema 3. Rezolvaţi sistemul: $\begin{cases} \log_2 x_1 = \log_5(x_2+x_3+1) \\ \log_2 x_2 = \log_5(x_3+x_1+1) \\ \log_2 x_3 = \log_5(x_1+x_2+1) \end{cases}$.

Dorel Barbu, Timişoara

Problema 4. Determinaţi funcţiile bijective $f:[0,1]\to[0,1]$ cu proprietatea că

$$f\left(2x-f(x)\right)=x, \text{ pentru orice } x\in[0,1].$$

Dincă Pepino, Caracal

Problema 1. Notând $\sqrt[3]{3\cdot 2^x-6}=a,\ \sqrt[3]{2\cdot 2^x-4}=b,\ \sqrt[3]{3\cdot 2^x-4}=c,\ \sqrt[3]{2\cdot 2^x-6}=d$, avem

$a+b=c+d$ şi $a^3+b^3=c^3+d^3$ .... (2p)

Folosind formula $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$, obţinem

$(a+b)(ab-cd)=0$, de unde $b=-a$ sau $ab=cd$ .... (3p)

În cazul $a=b$ se obţine $x=1$ .... (1p)

În cazul $ab=cd$ se obţine $2^x=0$, imposibil .... (1p)

Problema 2. **a)** $(z_1+z_2+z_3)^2 = z_1^2+z_2^2+z_3^2+2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)=2(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)$ .... (1p)

$z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1 = z_1z_2z_3\left(\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}\right)=z_1z_2z_3\cdot\overline{z_1+z_2+z_3}$ .... (1p)

Notând $s=z_1+z_2+z_3$, avem $s^2=z_1z_2z_3\cdot\bar{s}$, de unde, trecând la modul, rezultă $|s|^2=2|s|$, deci $|s|\in\{0,2\}\subset\mathbb{N}$ .... (2p)

b) Cum $z_3\in\mathbb{R}$, rezultă $z_3=\pm1$, deci $z_1^2+z_2^2=-1 \Rightarrow (z_1+z_2)^2=1 \Rightarrow z_1+z_2\in\{-1,1\}$ .... (1p)

Rezolvând sistemele de forma $z_1+z_2=s,\ z_1z_2=1$, cu $s=\pm1$, se obţin soluţiile

$(z_1,z_2)\in\left\{(\varepsilon,\varepsilon^2),\ (\varepsilon^2,\varepsilon),\ (-\varepsilon,-\varepsilon^2),\ (-\varepsilon^2,-\varepsilon)\right\}$, unde $\varepsilon\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R},\ \varepsilon^3=1$ .... (2p)

Problema 3. Notând $\begin{cases} \log_2 x_1 = \log_5(x_2+x_3+1)=a \\ \log_2 x_2 = \log_5(x_3+x_1+1)=b \\ \log_2 x_3 = \log_5(x_1+x_2+1)=c \end{cases}$, rezultă $\begin{cases} 2^a+2^b+1=5^c \\ 2^b+2^c+1=5^a \\ 2^c+2^a+1=5^b \end{cases}$ .... (2p)

Scăzând primele două ecuaţii ale sistemului se obţine $2^a+5^a=2^c+5^c$, de unde, ţinând cont că funcţia $x\to 2^x+5^x$ este injectivă, rezultă $a=c$ şi analog, $b=c$ .... (2p)

Atunci $2\cdot 2^a+1=5^a \Leftrightarrow 2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^a+\left(\frac{1}{5}\right)^a=1$, cu soluţia (unică – demonstraţie!) $a=1$ .... (2p)

Se obţine $x_1=x_2=x_3=2$ .... (1p)

Problema 4. Relaţia din enunţ este echivalentă cu $f^{-1}(x)=2x-f(x)$, de unde, pentru $x\to f(t)$, obţinem

$f\left(f(t)\right)=2f(t)-t$, pentru orice $t\in[0,1]$ .... (2p)

Fie $x_0\in[0,1]$ ales arbitrar. Definim şirul $(x_n)_{n\ge0}$ prin $x_{n+1}=f(x_n),\ n\ge0$. Rezultă

$x_{n+2}=2x_{n+1}-x_n \Leftrightarrow x_{n+1}=\frac{x_n+x_{n+2}}{2},\ \forall n\ge0$, deci $(x_n)_{n\ge0}$ este progresie aritmetică .... (2p)

Notând cu r raţia progresiei, rezultă $x_n = x_0 + nr$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$. Deoarece $x_n \in [0,1]$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă că $r = 0$ .... (2p)

Atunci $x_0 = x_1$, adică $f(x_0) = x_0$. Cum x_0 a fost ales arbitrar din $[0,1]$, rezultă

$f(x) = x$, pentru orice $x \in [0,1]$ .... (1p)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ OLT

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013

Clasa a XI-a

Problema 1. Se consideră matricea $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $A^3 + 4A + 2013I_2 = \begin{pmatrix} 2018 & 7 \\ 0 & 2018 \end{pmatrix}$.

Arătaţi că $(A - I_2)^p = O_2$, pentru orice număr natural $p \geq 2$.

Gabriela Ionică şi Eduard Buzdugan, Slatina

Problema 2. Se consideră mulţimea G formată din toate matricele de ordin 3, cu elementele din mulţimea $\{-1, 1\}$, astfel încât produsul elementelor de pe fiecare linie, respectiv coloană, este egal cu –1.

a) Demonstraţi că numărul elementelor egale cu –1 ale unei matrice din G este 3, 5 sau 9.

b) Demonstraţi că dacă o matrice $A \in G$ este inversabilă, atunci $A^{-1} \notin G$.

c) Determinaţi mulţimea valorilor funcţiei $f : G \to \mathbb{R},\ f(X) = \det X$.

S.L.T.

Problema 3. Calculaţi $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\sqrt{1+\dfrac{k}{n^2}} - n\right)$.

[∗∗∗]

Problema 4. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 0}$, definit prin $a_0 = x \in \mathbb{R}$ şi $a_n = \dfrac{1}{n} - a_{n-1}$, pentru orice $n \geq 1$.

Determinaţi valorile lui x pentru care şirul $(a_n)_{n\geq 0}$ este convergent.

Florian Dumitrel, Slatina

Problema 1. Din enunţ rezultă că $A^3 + 4A = \begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \overset{not}{=} B$. Se observă că $A \cdot B = B \cdot A$, de unde se obţine că există $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ .... (2p)

Atunci $A^3 + 4A = \begin{pmatrix} a^3 + 4a & 3a^2b + 4b \\ 0 & a^3 + 4a \end{pmatrix}$, deci $a^3 + 4a = 5$ şi $b(3a^2 + 4) = 7$ .... (2p)

Obţinem $(a-1)(a^2 + a + 5) = 0$, cu singura soluţie reală $a = 1$, pentru care $b = 1$ .... (2p)

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $A - I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Cum $(A - I_2)^2 = O_2$, rezultă $(A - I_2)^p = O_2$, $\forall\ p \geq 2$ ………... (1p)

Problema 2. **a)** O matrice $X \in G$ are un număr impar de elemente egale cu –1. Dacă presupunem că un singur element al lui X este egal cu –1, atunci produsul elementelor de pe liniile pe care nu se află acest element este 1, contradicţie. Dacă $X \in G$ are 7 elemente egale cu –1, ele sunt distribuite astfel încât două linii au numai –1, iar pe a treia este numai un element egal cu –1. Pe coloanele pe care nu se află acesta, produsul elementelor este egal cu 1, contradicţie .... (1p)

Exemple de matrice din G cu 3, 5 respectiv 9 elemente egale cu –1 .... (1p)

b) Presupunem că există $A \in G$ inversabilă astfel încât $A^{-1} \overset{not}{=} B \in G$; atunci $A{\cdot}B = I_3$

Soluţia 1: $a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} = 1$. Cum $a_{11}b_{11}$, $a_{12}b_{21}$, $a_{13}b_{31} \in \{-1, 1\}$, rezultă că două dintre aceste trei produse sunt egale cu 1, iar al treilea cu -1. Înmulţind, rezultă $a_{11}b_{11}a_{12}b_{21}a_{13}b_{31} = -1$, absurd, întrucât $a_{11}a_{12}a_{13} = b_{11}b_{21}b_{31} = -1$

Soluţia 2: $A{\cdot}B = I_3 \Rightarrow a_{11}b_{21} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} = 0$. Cum $a_{11}b_{12}$, $a_{12}b_{22}$, $a_{13}b_{32} \in \{-1, 1\}$, suma a trei numere impare nu poate fi 0, contradicţie

.... (2p)

c) Dacă adunăm elementele primei linii la elementele celei de-a doua şi respectiv la elementele celei de-a treia, pe a doua şi a treia linie se obţin numai numere pare. De pe fiecare din liniile a doua şi a treia se poate scoate factorul comun 2, deci $\det X$ este multiplu de 4.

Din dezvoltarea determinantului de ordin 3 rezultă $-6 \le \det X \le 6$, deci $\det X \in \{-4, 0, 4\}$ .... (2p)

Există matrice $X \in G$ cu $\det X$ egal cu –4, 0, 4 (exemple!), deci $\operatorname{Im} f = \{-4, 0, 4\}$ .... (1p)

Problema 3. Notăm $a_n = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - n = \sum_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1 \right)$. Deoarece $\sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1 = \frac{k}{n^2} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}}$, pentru orice $k = \overline{1,n}$, rezultă că

$$\frac{k}{n^2} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}} \le \sqrt{1+\frac{k}{n^2}} - 1 \le \frac{k}{n^2} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$$ .... (3p)

de unde, sumând pentru $k = \overline{1,n}$, obţinem $\frac{n(n+1)}{2n^2} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}} \le a_n \le \frac{n(n+1)}{2n^2} \cdot \frac{1}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}$ .... (3p)

Aplicând criteriul cleştelui, rezultă că $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{4}$ .... (1p)

Problema 4. Înmulţind cu $(-1)^k$ relaţia $a_k + a_{k-1} = \frac{1}{k}$, putem scrie:

$$(-1)^k a_k - (-1)^{k-1} a_{k-1} = \frac{(-1)^k}{k}, \text{ pentru orice } k \in \mathbb{N}^*$$

Sumând pentru $k = \overline{1,n}$, rezultă $(-1)^n a_n - a_0 = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{1}{n}$, de unde $a_n = (-1)^n \cdot (x - s_n)$,

unde $s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ .... (3p)

Folosind identitatea lui Catalan: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$, $n \ge 1$, rezultă că

$s_{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n} \to \ln 2$ şi $s_{2n-1} = s_{2n} + \frac{1}{2n} \to \ln 2$, deci $s_n \to \ln 2$ .... (2p)

Atunci $a_{2n} = x - s_{2n} \to x - \ln 2$ şi $a_{2n-1} = -(x - s_{2n-1}) \to \ln 2 - x$.

Prin urmare, $(a_n)_{n\ge 0}$ este convergent dacă şi numai dacă $x - \ln 2 = \ln 2 - x$, adică $x = \ln 2$ .... (2p)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ OLT

ETAPA LOCALĂ - 16 FEBRUARIE 2013

Clasa a XII-a

Problema 1. Fie $a > 0,\ a \neq 1$. Calculaţi integrala

$$I = \int_0^1 a^{x^3+3x} \cdot \ln a^{x^5+4x^3+3x} dx.$$

Titu Vîrban, Caracal

Problema 2. Calculaţi

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi/4} \cos x \cdot \cos x^n \, dx .$$

Florian Dumitrel, Slatina

Problema 3. a) Se consideră inelele finite A_1 şi A_2 cu proprietatea că numărul elementelor inversabile din A_1 este diferit de numărul elementelor inversabile din A_2. Arătaţi că cele două inele nu sunt izomorfe.
b) Daţi exemplu de două inele finite cu acelaşi număr de elemente inversabile.

Mihai George, Slatina

Problema 4. Fie mulţimea $Q_0 = \left\{ \dfrac{m}{n} \mid m,n \in \mathbb{Z},\ m,n \text{ impare} \right\}$ şi $G = Q_0 \times \mathbb{Z}$. Pe G se defineşte legea de compoziţie: $(q_1,k_1)*(q_2,k_2) = (q_1q_2, k_1+k_2),\ \forall\, q_1,q_2 \in Q_0,\ \forall\, k_1,k_2 \in \mathbb{Z}$.

a) Calculaţi $(1,1)*(1,2)*\ldots*(1,10)$.

b) Arătaţi că $(G,*)$ este grup abelian.

c) Arătaţi că grupurile $(G,*)$ şi $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ sunt izomorfe.

S.L.T.

Problema 1. Integrala se scrie $I = \ln a \cdot \int_0^1 \left(x^5+4x^3+3x\right) \cdot a^{x^3+3x} dx$.

Observând că $x^5+4x^3+3x = (x^3+3x)\cdot(x^2+1) = \frac{1}{3}\cdot(x^3+3x)\cdot(x^3+3x)'$, cu schimbarea de variabilă $t = x^3+3x$, rezultă

$$I = \frac{1}{3}\cdot \ln a \cdot \int_0^4 t a^t \, dt = \frac{1}{3}\cdot \int_0^4 t(a^t)' dt = \left.\frac{ta^t}{3}\right|_0^4 - \frac{1}{3}\cdot \int_0^4 a^t \, dt = \frac{4a^4}{3} - \left.\frac{a^t}{3\ln a}\right|_0^4 = \frac{4a^4}{3} - \frac{a^4-1}{3\ln a}.$$

Problema 2. Notând $I_n = \int_0^{\pi/4} \cos x \cdot \cos x^n \, dx$, avem:

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \cos x \cdot \cos x^n \, dx = \int_0^{\pi/4} \cos x \, dx - \int_0^{\pi/4} \cos x \cdot (1-\cos x^n)\, dx = \frac{\sqrt{2}}{2} - \int_0^{\pi/4} \cos x \cdot (1-\cos x^n)\, dx .$$

Deoarece

$$\left| \int_0^{\pi/4} \cos x \cdot (1-\cos x^n)\, dx \right| \le \int_0^{\pi/4} \left|\cos x \cdot (1-\cos x^n)\right| dx \le \int_0^{\pi/4} \left(1-\cos x^n\right) dx = 2\int_0^{\pi/4} \sin^2 \frac{x^n}{2}\, dx,$$

şi $\sin x \le x$, pentru orice $x \ge 0$, rezultă

$$\left| \int_0^{\pi/4} \cos x \cdot (1-\cos x^n)\, dx \right| \le 2\int_0^{\pi/4} \left(\frac{x^n}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{2}\cdot \left.\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\right|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2(2n+1)}\cdot\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1} \to 0,$$

deci $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Problema 3. **a)** Presupunem că cele două inele sunt izomorfe, iar $f : A_1 \to A_2$ un izomorfism. Notăm cu U_1 , U_2 mulţimile elementelor inversabile din A_1 respectiv, A_2.

Fie $x \in U(A_1)$; atunci

$$1_{A_2} = f\left(1_{A_1}\right) = f\left(x \cdot x^{-1}\right) = f\left(x\right)\cdot f\left(x^{-1}\right) \text{ şi } 1_{A_2} = f\left(1_{A_1}\right) = f\left(x^{-1}\cdot x\right) = f\left(x^{-1}\right)\cdot f\left(x\right),$$

de unde rezultă că $f(x) \in U_2$. Ca urmare, funcţia $h : U_1 \to U_2$, $h(x) = f(x)$ este corect definită. Deoarece *f* este bijectivă, rezultă că $h = f_{|U_1}$ este injectivă. Vom arăta că *h* este şi surjectivă. Fie $y \in U_2$. Din surjectivitatea funcţiei *f*, rezultă că există $x \in A_1$ astfel încât $f(x) = y$. Este suficient să arătăm că $x \in U_1$.

Avem: $$1_{A_1} = f^{-1}\left(1_{A_2}\right) = f^{-1}\left(y\cdot y^{-1}\right) = f^{-1}\left(y\right)\cdot f^{-1}\left(y^{-1}\right) = x\cdot f^{-1}\left(y^{-1}\right)$$

şi $$1_{A_1} = f^{-1}\left(1_{A_2}\right) = f^{-1}\left(y^{-1}\cdot y\right) = f^{-1}\left(y^{-1}\right)\cdot f^{-1}\left(y\right) = f^{-1}\left(y^{-1}\right)\cdot x,$$

deci *x* este inversabil în A_1 şi $x^{-1} = f^{-1}\left(y^{-1}\right)$. Aşadar $x \in U_1$.

În concluzie, *h* este bijectivă, deci $\text{card}U_1 = \text{card}U_2$.

b) $U(\mathbb{Z}_4, +, \cdot) = \{\hat{1}, \hat{3}\}$ şi $U(\mathbb{Z}_6) = \{\hat{1}, \hat{5}\}$.

Problema 4. **a)** Verificarea asociativităţii şi a comutativităţii

Elementul neutru este $(1,0)$

Simetricul unui element (q,k) este elementul $\left(\dfrac{1}{q}, -k\right) \in G$.

b) $(1,1)*(1,2)*...*(1,10) = (1,1+2+...+10)$

$(1,1+2+...+10) = (1,55)$

c) Fie funcţia $f : G \to \mathbb{Q}^*,\ f(q,k) = q2^k$

f morfism: $f\left((q_1,k_1)*(q_2,k_2)\right) = q_1q_2 2^{k_1+k_2} = f(q_1,k_1)\cdot f(q_2,k_2), \forall (q_1,k_1),(q_2,k_2) \in G$

f injectivă: Fie $(q_1,k_1),(q_2,k_2) \in G$, $q_1 = \dfrac{m_1}{n_1}$ şi $q_2 = \dfrac{m_2}{n_2}$, $m_1, n_1, m_2, n_2 \in \mathbb{Z}$ impare astfel încât $f(q_1,k_1) = f(q_2,k_2)$. Dacă $k_1 \neq k_2$, fără a restrânge generalitatea, putem presupune $k_1 < k_2$. Atunci, din $q_1 \cdot 2^{k_1} = q_2 \cdot 2^{k_2}$ rezultă $m_1 n_2 = 2^{k_2-k_1} m_2 n_1$, contradicţie, deoarece membrul stâng este impar, iar membrul drept este par. Ca urmare, $k_1 = k_2$, de unde $q_1 = q_2$.