

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală Dâmbovița
17-02-2019
Clasa a XI-a

Subiectul 1. Se consideră matricea $A \in M_2(\mathbb{R})$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Arătați că există $\lambda \in \mathbb{R}$, astfel încât $\lambda \cdot (I_2 + A)(I_2 - A) = I_2$ și calculați suma $S = I_2 + A + A^2 + \dots + A^{2019}$.

Subiectul 2. Pentru o matrice $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$, notăm cu $Tr(X) = a + d$ și $\det X = ad - bc$.

a) Arătați că $\det(A + xB) = \det A + (Tr(A) \cdot Tr(B) - Tr(AB)) \cdot x + \det B \cdot x^2$, oricare ar fi matricele $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ și numărul complex x ;

b) Demonstrați că $AB + BA = Tr(A) \cdot B + Tr(B) \cdot A + (Tr(AB) - Tr(A) \cdot Tr(B)) \cdot I_2$, oricare ar fi matricele $A, B \in M_2(\mathbb{C})$;

c) Dacă $A, B \in M_2(\mathbb{C})$ sunt două matrice nenule și $AB + BA = O_2$, arătați că $Tr(A) = Tr(B) = 0$ sau $\det A = \det B = 0$.

Florin Stănescu, G.M.B

Subiectul 3. Considerăm șirul de numere reale $(a_n)_{n \geq 1}$ astfel încât $a_1 = 2$ și

$$a_n = \frac{n+1}{n-1}(a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1}), n \geq 2. \text{ Notăm cu } s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n, n \geq 1.$$

a) Arătați că $s_n = \frac{2n}{n-1} \cdot s_{n-1}, n \geq 2$; **b)** Calculați: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2^1}{1 \cdot a_1} + \frac{2^2}{2 \cdot a_2} + \frac{2^3}{3 \cdot a_3} + \dots + \frac{2^n}{n \cdot a_n} \right)$;

Subiectul 4. Se consideră șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ cu termeni strict pozitivi. Știind că $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) =$

$$\gamma \in (0, \infty), \text{ arătați că: a) } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1; \quad \text{b) } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \right)^n = e.$$

G.M.B

