

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ 17.02.2018
Clasa a VIII-a

1. i) Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0, b > 0$, demonstrați că $\frac{(a+b)^2}{ab} \geq 4$.
ii) Dacă numerele $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a > 0, b > 0, c > 0$ verifică relația
 $a^2 + b^2 + 2abc + ab = abc^2$, demonstrați că $c \geq 3$.
2. Să se arate că dacă m și n sunt numere naturale nenule atunci $\left\{ \frac{m}{n} \right\} + \left\{ \frac{n}{m} \right\} \neq 1$. Prin
 $\{x\}$ se înțelege partea întreagă a numărului real x .
3. În cubul $ABCD A' B' C' D'$, $M \in (AB)$, $N \in (C'D')$ astfel încât $\frac{AM}{MB} = \frac{C'N}{ND'} = \frac{1}{k}$, k număr
real pozitiv
i) Determinați k pentru care $\triangle MNC$ este isoscel;
ii) Pentru $k = 1$, aflați cosinusul unghiului dintre planele (MNC) și (MBC) ;
4. Piramidele patrulatere regulate $VABCD$ și $SABCD$ au apotemele $[VM]$ și $[SM]$ per-
pendiculare, M fiind mijlocul lui $[AD]$. Știind că $VS = 2SM$ arătați că $\frac{V_{SABCD}}{V_{VABCD}} = \frac{1}{3}$.

NOTĂ:

1. Toate subiectele sunt obligatorii
2. Timpul de lucru este de trei ore
3. Fiecare subiect se punctează de la 1 la 7 puncte