



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ
22 februarie 2014

Clasa a V-a
Bareme de corectare

Subiectul I**a). Aflati numerele naturale a si b astfel incat $(a+b)(a-b-1)=2014$.****b). Exista a si b numere naturale astfel incat $(a^2+b^2+a+b)^2 + (a^2+b^2-a-b)^2=2014$?****Argumentati.**

Barem:

a). $2014=2 \cdot 19 \cdot 53$, $D_{2014}=\{1,2,19,38,53,106,1007,2014\}$ 2p $a+b > a-b-1$, rezulta ca avem urmatoarele patru cazuri:i). $a+b=2014$ si $a-b-1=1$ cu solutia $a=1008$, $b=1006$.ii). $a+b=1007$ si $a-b-1=2$ cu solutia $a=505$, $b=502$.iii). $a+b=106$ si $a-b-1=19$ cu solutia $a=63$, $b=43$.iv). $a+b=53$ si $a-b-1=38$ cu solutia $a=46$, $b=7$2pb). $x = a^2+b^2+a+b = a(a+1)+b(b+1)=2k$, k numar natural (produsul a doua nr. consecutive este numar par). $y = a^2+b^2-a-b = a(a-1)+b(b-1)=2p$, p numar natural.....2pDeci $x^2+y^2=(2k)^2 + (2p)^2=4k^2 + 4p^2=M_4$. Dar $2014=M_4+2$, rezulta ca nu exista a si b numere naturale care sa verifice conditiile problemei.....1p**Subiectul II****a). Sa se scrie $a=10^{2014}$ ca suma de doua patrate perfecte.****b). Sa se scrie $b=6^{2015}$ ca suma de trei cuburi perfecte.**

Barem:

a). $10^2=6^2+8^2$ 1p $10^{2014}=10^2 \cdot 10^{2012}=(6^2+8^2) \cdot (10^{1006})^2=(6 \cdot 10^{1006})^2 + (8 \cdot 10^{1006})^2$ 2pb). $6^2=1^3+2^3+3^3$ 2p $6^{2015}=6^2 \cdot 6^{2013}=(1^3+2^3+3^3) \cdot (6^{671})^3=(1 \cdot 6^{671})^3 + (2 \cdot 6^{671})^3 + (3 \cdot 6^{671})^3$ 2p**Subiectul III****Fie $M=\{2014,2015,2016,...,2113\}$.****a). Sa se arate ca oricum am alege 51 numere din multimea M , exista doua a caror suma este un numar prim.****b). Sa se arate ca exista doua multimi X si Y disjuncte cu proprietatea ca $X \cup Y=M$ si suma elementelor multimii X este egala cu suma elementelor multimii Y.****c). Sa se arate ca nu exista doua multimi X si Y disjuncte cu proprietatea ca**



$X \cup Y = M$ și produsul elementelor multimii X este egal cu produsul elementelor multimii Y .

Barem:

a). $\text{card} M = 2113 - 2014 + 1 = 100$ 1p

Considerăm următoarele multimi: $M_1 = \{2014, 2113\}$, $M_2 = \{2015, 2112\}$,
 $M_3 = \{2016, 2111\}$, ..., $M_{50} = \{2063, 2064\}$.

Suma elementelor fiecărei multimi este 4127 1p

Avem 51 numere și 50 multimi, rezulta cu principiul cutiei că există două numere în aceeași multime deci există două numere cu suma 4127 care este nr. prim (se demonstrează) 1p

b). Considerăm $X = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \dots \cup M_{25}$ și $Y = M_{26} \cup M_{27} \cup M_{28} \cup \dots \cup M_{50}$

X și Y sunt disjuncte. Suma elementelor multimii X este egală cu suma elementelor multimii Y și este $4127 \cdot 25$. Deci există multimile cu proprietatea din

enunț 2p

c). Presupunem că există două multimi X și Y cu proprietatea din enunț. Dacă produsul elementelor multimii X este egal cu produsul elementelor multimii Y atunci produsul tuturor elementelor multimii M trebuie să fie pătrat perfect.

..... 1p

Dar $2014 \cdot 2015 \cdot \dots \cdot 2113$ este divizibil cu 2113 și nu este divizibil cu 2113^2 deci nu este pătrat perfect (se arată că 2113 e prim) 1p

Deci nu există două multimi cu proprietatea din enunț.

Subiectul IV

Se considera 100 puncte pe un cerc. În fiecare punct se înscrie aleator câte un număr natural de la 1 la 100. Este posibil ca suma oricărui patru numere înscrise în patru puncte consecutive să fie mai mică decât 203?

Barem:

Notăm $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ numerele corespunzătoare celor 100 de puncte de pe cerc.

Presupunem că suma oricărui patru nr. înscrise în patru puncte consecutive este mai mică decât 203.

$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 \leq 202$, $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 \leq 202$, $a_3 + a_4 + a_5 + a_6 \leq 202$, ..., $a_{97} + a_{98} + a_{99} + a_{100} \leq 202$,

$a_{98} + a_{99} + a_{100} + a_1 \leq 202$, $a_{99} + a_{100} + a_1 + a_2 \leq 202$, $a_{100} + a_1 + a_2 + a_3 \leq 202$. Adunând cele 100 relații obținem
 $4(a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100}) \leq 20200$, de unde $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} \leq 5050$.

..... 2p

Dar $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{100} = 1 + 2 + 3 + \dots + 100 = 5050$. Egalitatea se obține numai dacă în toate cele 100 relații scrise anterior avem egalitate. 3p

Deci, de exemplu: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 202$, $a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 202$ de unde rezulta $a_1 = a_5$. Dar $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ sunt distincte de unde rezulta contradicția. Presupunerea făcută este falsă.

..... 2p

Concluzia: nu este posibil ca suma oricărui patru numere înscrise în patru puncte consecutive să fie mai mică decât 203.

CLASA a VI-a

Bareme de corectare

Subiectul I

Notăm $d = (a, b)$; atunci există numerele naturale nenule p și q astfel încât $a = pd$, $b = qd$ și $(p, q) = 1$. 1 p

Se obține $[a, b] = pqd$ și proprietățile din ipoteză devin:

$pd + qd = 2014$ și $pqd = 682d \Rightarrow pq = 682$ și $(p + q)$ divide 2014, $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$. 1 p

Dar $682 = 2 \cdot 11 \cdot 31 = pq$, $(p, q) = 1$. 1 p

Dacă $p = 2 \Rightarrow q = 341 \Rightarrow p + q = 343 = 7^3$, nu divide 2014.

Dacă $p = 11 \Rightarrow q = 62 \Rightarrow p + q = 73$, nu divide 2014.

Dacă $p = 31 \Rightarrow q = 22 \Rightarrow p + q = 53$, care divide 2014. 2 p

Cum celelalte cazuri posibile revin tot la acestea, schimbând a cu b , singura situație convenabilă este $p = 31$, $q = 22$, de unde $d = 2014 : (p + q) = 2014 : 53 = 38$. 1 p

Se obține $a = 31 \cdot 38 = 1178$ și $b = 22 \cdot 38 = 836$. 1 p

Subiectul II

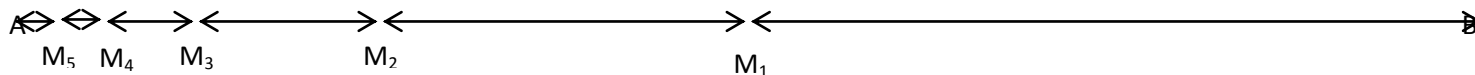
$2a + 6b - 5m = 0 \Leftrightarrow 2a + b = 5(m - b)$ se divide cu 5 1p

$\Rightarrow 2a(2a + b) = 4a^2 + 2ab$ se divide cu 5

$b(2a + b) = 2ab + b^2$ se divide cu 5 $\Rightarrow (4a^2 + 2ab) - (2ab + b^2) = 4a^2 - b^2$ se divide cu 5; cum $5b^2$ se divide cu 5 $\Rightarrow 4a^2 - b^2 + 5b^2 = 4(a^2 + b^2)$ se divide cu 5. 5p

Dar $(4, 5) = 1$, de unde $a^2 + b^2$ se divide cu 5. 1p

Subiectul III



a) $AB = 1m = 1000mm$

$AM_1 = AB : 2 = 500mm$

$AM_2 = AM_1 : 2 = AB : 2^2 = 250mm$

$AM_3 = AM_2 : 2 = AB : 2^3 = 125mm$

$AM_4 = AM_3 : 2 = AB : 2^4 = 62,5mm$

$AM_5 = AM_4 : 2 = AB : 2^5 = 31,25mm$

$M_5M_4 = AM_5 = 31,25mm$

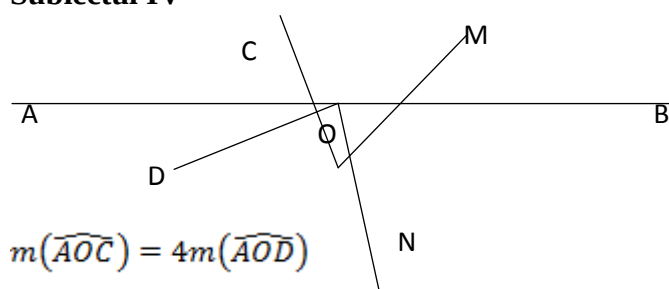
b) Se observă că $AM_n = AB : 2^n$ 2p

$\Rightarrow AM_n < 1mm \Leftrightarrow 2^n > AB$, $AB = 1000mm$ 2p

$2^{10} = 1024$ 1p

$2^9 = 512 \Rightarrow n = 10$ este cea mai mică valoare. 2p

Subiectul IV





$$\begin{aligned} m(\widehat{COD}) &= 90^\circ \Rightarrow m(\widehat{AOD}) = 90^\circ : 5 = 18^\circ, m(\widehat{AOC}) = 4m(\widehat{AOD}) = 72^\circ & 3p \\ m(\widehat{BOC}) &= 180^\circ - m(\widehat{AOC}) = 108^\circ \Rightarrow m(\widehat{COM}) = 54^\circ \Rightarrow m(\widehat{DOM}) = 90^\circ + 54^\circ = 144^\circ & 2p \\ m(\widehat{BOD}) &= 180^\circ - m(\widehat{AOD}) = 162^\circ \Rightarrow m(\widehat{BON}) = 81^\circ \Rightarrow m(\widehat{MON}) = 54^\circ + 81^\circ = 135^\circ & 2p \end{aligned}$$

CLASA a VIII-a
Bareme de corectare

SUBIECTUL I

(3p) **a)** Se consideră numărul $A = n^2 - n - 12$, $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că, dacă A este divizibil cu 7, atunci A este divizibil cu 98.

(4p) **b)** Să se arate că numărul $B = n^2 + 10n - 3$ nu este divizibil cu 196, pentru orice valoare naturală a numărului n .

Soluție

a) $A = (n+3)(n-4)$, **(1p)**; $7/(n+3) \Leftrightarrow 7/(n-4)$ și $2/(n+3)(n-4), (\forall)n \in \mathbb{N}$ **(1p)**; finalizare **(1p)**.

b) $B = (n+5)^2 - 28$, **(1p)**; Presupunem $196/B \Rightarrow B = 196k$, $k \in \mathbb{N}$. Deci

$$(n+5)^2 - 28 = 196k \Leftrightarrow (n+5)^2 = 28(7k+1), \text{ **(1p)**};$$

$$7/(n+5) \text{ și avem } (7p)^2 = 28(7k+1) \Leftrightarrow 7p^2 = 4(7k+1), p \in \mathbb{N} \text{ **(1p)**. Finalizare **(1p)**}$$

SUBIECTUL II

(1p) **a)** Stabiliți dacă $\frac{1}{\sqrt{2014}} < \frac{2}{\sqrt{2014} + \sqrt{2013}} < \frac{1}{\sqrt{2013}}$.

(3p) **b)** Arătați că $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, pentru orice valoare naturală nenulă a numărului n .

(3p) **c)** Demonstrați că $\frac{1}{\sqrt{100}} + \frac{1}{\sqrt{101}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120}} > \frac{1}{\sqrt{145}} + \frac{1}{\sqrt{146}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{169}}$.

Soluție

a) Avem

$$\frac{2}{2\sqrt{2014}} < \frac{2}{\sqrt{2014} + \sqrt{2013}} < \frac{2}{2\sqrt{2013}} \Leftrightarrow \sqrt{2014} + \sqrt{2014} > \sqrt{2014} + \sqrt{2013} > \sqrt{2013} + \sqrt{2013}. \text{ **(1p)}**}$$

b) Avem $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ **(1p)**; $\frac{2}{2\sqrt{n+1}} < \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{2\sqrt{n}}$ **(1p)**

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n} + \sqrt{n}, \text{ finalizare **(1p)}**}$$

c) Fie

$$x = \frac{1}{\sqrt{100}} + \frac{1}{\sqrt{101}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120}} > 2(\sqrt{101} - \sqrt{100}) + 2(\sqrt{102} - \sqrt{101}) + \dots + 2(\sqrt{121} - \sqrt{120}) = 2, \text{ **(1p)}** și}$$



$$y = \frac{1}{\sqrt{145}} + \frac{1}{\sqrt{146}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{169}} < 2(\sqrt{145} - \sqrt{144}) + 2(\sqrt{146} - \sqrt{145}) + \dots + 2(\sqrt{169} - \sqrt{168}) = 2, \text{ (1p).}$$

Finalizare (1p)

SUBIECTUL III

Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$. Punctele P, Q și R sunt proiecțiile punctului A pe dreptele $A'D$, $A'B$ și respectiv $A'C$.

(4p) a) Să se arate că dreapta $A'C$ este perpendiculară pe planul (PQR) ;

(3p) b) Să se calculeze aria triunghiului PQR, pentru $AB = a \text{ cm}$, $a > 0$.

Soluție

a) $AP \perp A'D$, $AP \perp DC \Rightarrow AP \perp (A'DC)$ (1p)

$AP \perp A'C$, $AR \perp A'C \Rightarrow A'C \perp (APR) \Rightarrow A'C \perp PR$ (1p)

Analog $A'C \perp (ARQ) \Rightarrow A'C \perp QR$ sau $PQ \parallel BD$ și $BD \perp A'C \Rightarrow PQ \perp A'C$ (1p)

Finalizare (1p)

b) $PQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}, (\Delta A'BD)$ (1p)

$RQ = \frac{a\sqrt{6}}{6}, (\Delta A'BC)$; $RP = \frac{a\sqrt{6}}{6}, (\Delta A'DC)$ (1p)

$A_{\Delta PQR} = \frac{a^2\sqrt{3}}{24}$ (1p)

SUBIECTUL I V

Fie A, B, C și D patru puncte necoplanare așa încât $AB = 6 \text{ cm}$, $AC = AD = 6\sqrt{2} \text{ cm}$ și $m\angle(DAB) = m\angle(BAC) = m\angle(CAD) = 90^\circ$.

(2p) a) Să se calculeze aria triunghiului BCD;

(5p) b) Să se afle lungimea segmentului AE, unde E este proiecția punctului A pe planul (BCD) .

Soluție

a) $BC = BD = 6\sqrt{3}$, $CD = 12$ (1p)

$A_{\Delta BCD} = 36\sqrt{2}$ (1p)

b) Demonstrează că punctul E este ortocentrul triunghiului BCD. (2p)

Fie $BM \perp CD$, $DN \perp BC$, $M \in CD$, $N \in BC$, avem:

$BM = 6\sqrt{2}$, $DN = 4\sqrt{6}$, $BN = 2\sqrt{3}$ (1p)

$\Delta BNE \sim \Delta BMC$, $BE = 3\sqrt{2}$ (1p). Finalizare $AE = 3\sqrt{2}$, (1p)

CLASA a VIII-a
Bareme de corectare

SUBIECTUL I



(3p) **a)** Se consideră numărul $A = n^2 - n - 12$, $n \in \mathbb{N}$. Să se arate că, dacă A este divizibil cu 7, atunci A este divizibil cu 98.

(4p) **b)** Să se arate că numărul $B = n^2 + 10n - 3$ nu este divizibil cu 196, pentru orice valoare naturală a numărului n .

Soluție

a) $A = (n+3)(n-4)$, **(1p)**; $7/(n+3) \Leftrightarrow 7/(n-4)$ și $2/(n+3)(n-4), (\forall) n \in \mathbb{N}$ **(1p)**; finalizare **(1p)**.

b) $B = (n+5)^2 - 28$, **(1p)**; Presupunem $196/B \Rightarrow B = 196k$, $k \in \mathbb{N}$. Deci

$$(n+5)^2 - 28 = 196k \Leftrightarrow (n+5)^2 = 28(7k+1), \text{ (1p);}$$

$$7/(n+5) \text{ și avem } (7p)^2 = 28(7k+1) \Leftrightarrow 7p^2 = 4(7k+1), p \in \mathbb{N} \text{ (1p). Finalizare (1p)}$$

SUBIECTUL II

(1p) **a)** Stabiliți dacă $\frac{1}{\sqrt{2014}} < \frac{2}{\sqrt{2014} + \sqrt{2013}} < \frac{1}{\sqrt{2013}}$.

(3p) **b)** Arătați că $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}}$, pentru orice valoare naturală nenulă a numărului n .

(3p) **c)** Demonstrați că $\frac{1}{\sqrt{100}} + \frac{1}{\sqrt{101}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120}} > \frac{1}{\sqrt{145}} + \frac{1}{\sqrt{146}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{169}}$.

Soluție

a) Avem

$$\frac{2}{2\sqrt{2014}} < \frac{2}{\sqrt{2014} + \sqrt{2013}} < \frac{2}{2\sqrt{2013}} \Leftrightarrow \sqrt{2014} + \sqrt{2014} > \sqrt{2014} + \sqrt{2013} > \sqrt{2013} + \sqrt{2013}. \text{ (1p)}$$

b) Avem $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ **(1p)**; $\frac{2}{2\sqrt{n+1}} < \frac{2}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{2}{2\sqrt{n}}$ **(1p)**

$$\sqrt{n+1} + \sqrt{n+1} > \sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n} + \sqrt{n}, \text{ finalizare (1p)}$$

c) Fie

$$x = \frac{1}{\sqrt{100}} + \frac{1}{\sqrt{101}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{120}} > 2(\sqrt{101} - \sqrt{100}) + 2(\sqrt{102} - \sqrt{101}) + \dots + 2(\sqrt{121} - \sqrt{120}) = 2, \text{ (1p) și}$$

$$y = \frac{1}{\sqrt{145}} + \frac{1}{\sqrt{146}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{169}} < 2(\sqrt{145} - \sqrt{144}) + 2(\sqrt{146} - \sqrt{145}) + \dots + 2(\sqrt{169} - \sqrt{168}) = 2, \text{ (1p).}$$

Finalizare **(1p)**

SUBIECTUL III

Se consideră cubul $ABCD A'B'C'D'$. Punctele P , Q și R sunt proiecțiile punctului A pe dreptele $A'D$, $A'B$ și respectiv $A'C$.

(4p) **a)** Să se arate că dreapta $A'C$ este perpendiculară pe planul (PQR) ;

(3p) **b)** Să se calculeze aria triunghiului PQR , pentru $AB = a$ cm, $a > 0$.



Soluție

$$\text{a) } AP \perp A'D, AP \perp DC \Rightarrow AP \perp (A'DC) \text{ (1p)}$$

$$AP \perp A'C, AR \perp A'C \Rightarrow A'C \perp (APR) \Rightarrow A'C \perp PR \text{ (1p)}$$

$$\text{Analog } A'C \perp (ARQ) \Rightarrow A'C \perp QR \text{ sau } PQ \parallel BD \text{ și } BD \perp A'C \Rightarrow PQ \perp A'C \text{ (1p)}$$

Finalizare (1p)

$$\text{b) } PQ = \frac{a\sqrt{2}}{2}, (\Delta A'BD) \text{ (1p)}$$

$$RQ = \frac{a\sqrt{6}}{6}, (\Delta A'BC); \quad RP = \frac{a\sqrt{6}}{6}, (\Delta A'DC) \text{ (1p)}$$

$$A_{\Delta PQR} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{24} \text{ (1p)}$$

SUBIECTUL I V

Fie A, B, C și D patru puncte necoplanare așa încât $AB = 6\text{cm}$, $AC = AD = 6\sqrt{2}\text{ cm}$ și $m\angle(DAB) = m\angle(BAC) = m\angle(CAD) = 90^\circ$.

(2p) **a)** Să se calculeze aria triunghiului BCD;

(5p) **b)** Să se afle lungimea segmentului AE, unde E este proiecția punctului A pe planul (BCD).

Soluție

$$\text{a) } BC = BD = 6\sqrt{3}, CD = 12 \text{ (1p)}$$

$$A_{\Delta BCD} = 36\sqrt{2} \text{ (1p)}$$

b) Demonstrează că punctul E este ortocentrul triunghiului BCD. (2p)

Fie $BM \perp CD$, $DN \perp BC$, $M \in CD$, $N \in BC$, avem:

$$BM = 6\sqrt{2}, DN = 4\sqrt{6}, BN = 2\sqrt{3} \text{ (1p)}$$

$$\Delta BNE \sim \Delta BMC, BE = 3\sqrt{2} \text{ (1p). Finalizare } AE = 3\sqrt{2}, \text{ (1p)}$$