

BAREM DE CORECTARE

etapa locală

16 februarie 2013

Clasa a XII - a

SUBIECTUL I (7p)

- a) $(G, *)$ grup abelian.....3p
 f izomorfism..... 1p
- b) cum f este morfism $\Rightarrow f(A) = f\left(\frac{1}{7} * \frac{1}{17} * \frac{1}{31} * \dots * \frac{1}{2n^2-1}\right) = f\left(\frac{1}{7}\right) \cdot f\left(\frac{1}{17}\right) \cdot f\left(\frac{1}{31}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{1}{2n^2-1}\right)$ 1p
- $$\Rightarrow f(A) = \prod_{k=2}^n f\left(\frac{1}{2k^2-1}\right) = \prod_{k=2}^n \frac{n^2-1}{n^2} = \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3^2} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4^2} \cdot \dots \cdot \frac{(n-2) \cdot n}{(n-1)^2} \cdot \frac{(n-1) \cdot (n+1)}{n^2} = \frac{n+1}{2n}$$
- 1p
- $$\frac{1-A}{1+A} = \frac{n+1}{2n} \Rightarrow A = \frac{n-1}{3n+1}$$
- 1p

SUBIECTUL II (7p)

- a) $x^3 y = yx^3 \Rightarrow xx^2 y = yx^3 \Rightarrow xyx^2 = yx^3 \Rightarrow xy = yx$ 1p
- b) $x^3 y = yx^3 \Rightarrow x^6 y = yx^6$ 1p
 $x^7 y = yx^7 \Rightarrow xx^6 y = yx^7 \Rightarrow xyx^6 = yx^7 \Rightarrow xy = yx$ 1p
- c) m și n prime între ele $\Rightarrow (\exists) a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $am + bn = 1$ 1p
 orice putere întregă a lui x^n sau x^m comută cu y 1p
 $xy = x^{am+bn} y = x^{am} x^{bn} y = x^{am} yx^{bn} = yx^{am} x^{bn} = yx^{am+bn} = xy$2p

SUBIECTUL III (7p)

- a) $f_i(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}, & x \in \mathbb{R}^* \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ și o primitivă ar fi de forma $F_i(x) = \begin{cases} x \cos \frac{1}{x} + c_1, & x < 0 \\ c, & x = 0 \\ x \cos \frac{1}{x} + c_2, & x > 0 \end{cases}$ 1p
- Din continuitatea lui F_i în origine se obține $c_1 = c_2 = c$1p
 F_i nu este derivabilă în origine se obține deci nu poate fi primitivă pentru F 1p
- b) Pentru $n \geq 2$ orice primitivă este de forma $F_n(x) = \begin{cases} x^n \cos \frac{1}{x} + c, & x \neq 0 \\ c, & x = 0 \end{cases}$ 2p
- $$F'_n(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F_n(x) - F_n(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \cos \frac{1}{x} = 0 = f_n(0)$$
- 2p

SUBIECTUL IV (7p)

- a) $I_2 = \int_0^1 x^2 \ln(x+1) dx = \frac{x^3}{3} \ln(x+1) \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x+1} dx$1p
- finalizare 2p
- b) După integrare prin părți: $I_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1) dx = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx$ 1p
- $$0 \leq \frac{1}{x+1} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq J_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1} dx \leq \frac{1}{n+1} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = 0$$
- 2p
- $$nI_n = \frac{n \ln 2}{n+1} - \frac{n}{n+1} J_n$$
- și deci
- $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n = \ln 2$
- 1p