1.

$det(A^2+I_2)=det[(A+iI_2)(A-iI_2)]=det(A+iI_2)\,det(A-iI_2)=0 \Rightarrow det(A+iI_2)=0\ sau\ det(A-iI_2)=0$ ……………………………………………2p

Dacă $det(A+iI_2)=0$, considerând $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ va rezulta $\begin{vmatrix} a+i & b \\ c & d+i \end{vmatrix}=(ad-bc-1)+i(a+d)=0$ deci $ad-bc=1$ și $a+d=0$, sau $d=-a$ și $a^2+bc=-1$ ………………………………………………………………………….............**2p**

Rezultă $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}$ și $A^2=\begin{pmatrix} a^2+bc & 0 \\ 0 & a^2+bc \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ = -I_2

În cazul $det(A+iI_2)=0$ vor rezulta aceleași relații $ad-bc=1$ și $a+d=0$, apoi …relația……………………………………………………………….. **3p**

2. a) Folosind $A\cdot A^{-1}=I_3 \Rightarrow det(A\cdot A^{-1})=1$ și $detA\ \cdot det(A^{-1})=1$, deci $det(A^{-1})=\frac{1}{d}$
………………………………………………………………………………..….2p
Din relația $d\cdot A^{-1}=A^{*} \Rightarrow det(d\cdot A^{-1})=detA^{*}$ deci $d^3\det A^{-1}=detA^{*}$, adică $detA^{*}=d^2$ ………………………………………………………………………**2p**
b) Presupunând că există matricele, trecând la determinanți ar rezulta:
$$\det X\cdot det\ Y=d$$
$$\det Y\cdot det\ Z=d$$
$$\det Z\cdot det\ X=d$$
Înmulțind relațiile ar rezulta:
$(\det X\ \cdot \det Y\cdot det\ Z)^2=d^3<0$ (contradicție) …………………… **3p**

3. a) Considerând expresia de sub limită sub forma:
$$f(x)=\frac{\left[\left(\frac{tg(a_1x)}{a_1x}\right)a_1+\cdots+\left(\frac{tg(a_nx)}{a_nx}\right)a_n\right]^2}{\left(\frac{tg(a_1^2x)}{a_1^2x}\right)a_1^2+\cdots+\left(\frac{tg(a_n^2x)}{a_n^2x}\right)a_n^2}$$
Atunci
$$\lim_{x\to 0}f(x)=\frac{(a_1+a_1+\cdots+a_n)^2}{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$$
……………………………………………………………………………………5p

Cum $b_n\geq n \Rightarrow (a_1+a_1+\cdots+a_n)^2\geq n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$
Pe de altă parte, în baza inegalității C-B-S avem relația: $(a_1+a_1+\cdots+a_n)^2\leq n(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)$ cu egalitate dacă $\frac{a_1}{1}=\frac{a_2}{1}=\ldots=\frac{a_n}{1}$; din dubla inegalitate rezultă

$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 = n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)$ (cazul de egalitate), adică $a_1 = a_1 = \cdots = a_n$
……………………………………………………………………………………2p

4. Avem

$$a_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k-1} = \frac{2\cdot 2}{1}\cdot\frac{3\cdot 3}{2}\cdot\ldots\ldots\cdot\frac{n\cdot n}{n-1} = \frac{n!\cdot n!}{(n-1)!} = n!\cdot n = n!\cdot\left[(n+1)-1\right] = (n+1)! - n!,$$

$$b_n = \sum_{k=2}^{n}\left[(k+1)! - k!\right] = (n+1)! - 2,\ c_n = \frac{(n+1)!-2}{(n+1)!} = 1 - \frac{2}{(n+1)!},$$ ……………………….3p

$$d_n = \left(1 + \frac{-2}{(n+1)!}\right)^{(n+1)!}$$ ……………………………………………………………………………1p

Avem $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{-2}{(n+1)!}\right) = 1 + 0 = 1$ si $\lim\limits_{n\to\infty} d_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{-2}{(n+1)!}\right)^{(n+1)!} =$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1 + \frac{-2}{(n+1)!}\right)^{\frac{(n+1)!}{-2}}\right]^{\frac{-2}{(n+1)!}\cdot(n+1)!} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$$ …………………………………………………………3p