

S.S.M.R. Filiala Dâmbovița

I.S.J. Dâmbovița

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa Locală Dâmbovița
17-02-2019

Clasa a XII-a

Subiectul 1. Pe mulțimea $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ se definește legea de compoziție " $\circ$ " prin:

$$(a, b) \circ (c, d) = (ac, bc + d).$$

- a) Demonstrați că $(G, \circ)$ este grup necomutativ.
- b) Arătați că în G există o infinitate de elemente de ordinul 2. Există în G elemente de ordinul 3?

Subiectul 2. Pentru fiecare număr natural $n \geq 1$ notăm

$$F_n = \int x^n \sqrt{x^2 + 1} dx, x \in \mathbb{R}$$

- a) Să se calculeze F_1 și F_2 .
- b) Să se stabilească o relație de recurență pentru șirul $(F_n)_{n \geq 1}$.

Subiectul 3. a) Să se arate că $\int_{-1}^1 \ln(x^2 + x + 1) dx = \int_{-1}^1 \ln(x^2 - x + 1) dx$.

- b) Să se calculeze $\int_{-1}^1 \ln(x^4 + x^2 + 1) dx$.

Gazeta Matematică

Subiectul 4. Fie $(G, \cdot)$ un grup pentru care funcția $f : G \rightarrow G, f(x) = x^4$, este morfism injectiv de grupuri iar funcția $g : G \rightarrow G, g(x) = x^{2019}$, este morfism surjectiv de grupuri. Să se arate că $(G, \cdot)$ este comutativ.

Marius Mîinea

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.