



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
21 februarie 2016

Clasa a XI-a

1. a) Se consideră matricea $A = (a_{ij})$, $i, j = \overline{1, 4}$, definită astfel:

$a_{ij} = \max(i, j)$ oricare ar fi $i, j = \overline{1, 4}$. Să se calculeze $\det A$.

b) Fie $A, B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z})$ cu $AB = BA$ și $\det A = \det B = 0$. Să se arate că $\det(A^3 + B^3)$ este sumă a două cuburi de numere întregi.

2. a) Dați exemplul de matrice $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $(A+B)^{2016} = (A-B)^{2016} = O_2$, $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 0$ și $\det A \cdot \det B \neq 0$.

b) Fie $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ astfel încât $(A+B)^{2016} = (A-B)^{2016} = O_2$.
Demonstrați că $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B = 0$ sau $\det A = \det B = 0$.

3. a) Fie $a_1, a_2, \dots, a_{2016} \in \mathbb{R}$, $a_1 + a_2 + \dots + a_{2016} = 0$. Calculați

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 \sqrt{n+a_1} + a_2 \sqrt{n+a_2} + \dots + a_{2016} \sqrt{n+a_{2016}}).$$

b) Demonstrați că există șiruri $(a_n)_{n \geq 0}$, cu $a_n \in \{-1, 1\}$ pentru orice $n \in \mathbb{N}$, astfel

$$\text{încât } \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n+a_1} + \sqrt{n+a_2} + \dots + \sqrt{n+a_n} - n\sqrt{n+a_0}) = \frac{1}{2}.$$

4. a) O funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, periodică și neconstantă, nu are limită la $+\infty$.

b) Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care verifică condițiile:

i) există $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = a \in \mathbb{R}$;

ii) $f(x+2) + f(x) = 2f(x+1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Timp de lucru: 3 ore.