

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

16. 02 . 2020 , CLASA A VI A

BAREM

Problema 1

Într-o cutie sunt mere. Merele se așează în pungi. Dacă fiecare pungă ar conține câte 8 mere, atunci ar fi o pungă numai cu 5. mere. Dacă fiecare pungă ar conține câte 10 mere, atunci ar fi o pungă numai cu 7 mere. Dacă fiecare pungă ar conține câte 12 mere, atunci ar fi o pungă numai cu 9 mere. Câte mere ar trebui să conțină cutia, minim, astfel încât cele trei condiții să fie îndeplinite simultan. Câte pungi ar fi necesare, dacă fiecare pungă ar conține câte 9 mere.

Soluție:

n = numărul merelor din cutie.

$$n = 8a + 5$$

$$n = 10b + 7$$

$$n = 12c + 9$$

2p

Obținem:

$$n + 3 = 8(a + 1)$$

$$n + 3 = 10(b + 1)$$

$$n + 3 = 12(c + 1)$$

2p

$$n + 3 = [8, 10, 12]$$

$$n + 3 = 120 \Rightarrow n = 117$$

2p

$$117 : 9 = 13 \text{ pungi.}$$

1p

Problema 2.

1. Arătați că nu există numerele $\overline{abc}$ și $\overline{xy}$ astfel încât $\overline{abc}$ să fie prim și

$$\overline{abc} - \overline{xy} = 5(a + b + c + x + y).$$

Soluție:

$$\overline{abc} - \overline{xy} = 5(a + b + c + x + y)$$

$$100a + 10b + c = 5a + 5b + 5c + 5x + 5y + 10x + y$$

2p

$$95a + 5b = 4c + 15x + 6y$$

2p

$$\left. \begin{array}{l} 96a + 6b = a + b + c + 3c + 15x + 6y \\ (96a + 6b) : 3 \\ (3c + 15x + 6y) : 3 \end{array} \right\} \Rightarrow (a + b + c) : 3 \Rightarrow$$

$$\overline{abc} : 3 \Rightarrow \overline{abc} \neq \text{număr prim}$$

3p

Problema 3. Care este cel mai mare număr de unghiuri cu măsuri numere naturale distincte, proporționale cu numere pare, ce pot fi construite în jurul unui punct? Calculați măsurile acestor unghiuri

Soluție

Fie n numărul de unghiuri căutat și $u_1, u_2, \dots, u_n$ măsurile lor.

$$\text{Avem: } \frac{u_1}{2} = \frac{u_2}{4} = \frac{u_3}{6} = \dots = \frac{u_n}{2n} \quad 1p$$

Pentru ca n să fie cât mai mare trebuie ca măsurile unghiurilor să fie cât mai mici și de aceea considerăm măsurile proporționale cu numerele pare începând cu cele mai mici. **1p**

$$\text{Cum, } u_1 + u_2 + \dots + u_n = 360^\circ \text{ și } 2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n \cdot (n + 1) \quad 1p$$

$$\text{Avem, } \frac{u_1}{2} = \frac{u_2}{4} = \frac{u_3}{6} = \dots = \frac{u_n}{2n} = \frac{360^\circ}{n \cdot (n+1)} \quad 1p$$

Deoarece $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$ și $n \cdot (n + 1)$ trebuie să fie divizor al lui 360, cât mai mare posibil, găsim că $n \cdot (n + 1) = 9 \cdot 10$ prin urmare $n = 9$ **2p**

Cel mai mare număr de unghiuri este 9, iar măsurile lor sunt: $u_1 = 8^\circ, u_2 = 16^\circ, u_3 = 24^\circ, u_4 = 32^\circ, u_5 = 40^\circ, u_6 = 48^\circ, u_7 = 56^\circ, u_8 = 64^\circ, u_9 = 72^\circ$. **1p**

Problema 4

Bisectoarele unghiurilor adiacente $\angle AOB$ și $\angle BOC$ formează un unghi cu măsura de 10° .

- Arătați că $100^\circ < 5 \cdot (\angle AOB) + 6 \cdot (\angle BOC) < 120^\circ$.
- Dacă $5 \cdot (\angle AOB) + 6 \cdot (\angle BOC) = 110^\circ$, arătați că OB este bisectoarea unghiului $\angle AOC$.

Soluție

$$\text{a) Fie } (\angle AOB) = 2x \text{ și } (\angle BOC) = 2y \Rightarrow x + y = 10^\circ. \quad 1p$$

$$\text{Deci } 5(\angle AOB) + 6(\angle BOC) = 10x + 12y \quad 1p$$

$$\text{Deducem că } 10(x + y) < 10x + 12y < 12(x + y) \Rightarrow 100^\circ < 10x + 12y < 120^\circ \quad 1p$$

$$\text{b) Pentru } 5(\angle AOB) + 6(\angle BOC) = 10x + 12y = 2y + 10(x + y) = 110^\circ \quad 1p$$

$$\text{Rezultă } 2x + 100^\circ = 110^\circ \Rightarrow x = 5^\circ \Rightarrow y = 5^\circ \quad 2p$$

$$\text{Finalizare, } OB \text{ este bisectoarea unghiului } AOC. \quad 1p$$

