

10

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală, 10 februarie 2024
Clasa a X – a

BAREM ORIENTATIV de CORECTARE și NOTARE:

Problema 1: soluție orientativă

a) $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$ 1p

$$\left| z + \frac{1}{a} \right|^2 - \left| \bar{z} - \frac{1}{a} \right|^2 = \left(x + \frac{1}{a} \right)^2 + y^2 - \left(x - \frac{1}{a} \right)^2 - y^2 = \frac{4x}{a} \quad \dots 1p$$

$$\frac{a}{4} \left(\left| z + \frac{1}{a} \right|^2 - \left| \bar{z} - \frac{1}{a} \right|^2 \right) = x = \operatorname{Re} z \quad \dots 1p$$

b) $2(6 + 9i)^n - 3(1 + 8i)^n = 3(7 + 4i)^n$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{n-1} (2 + 3i)^n = (1 + 8i)^n + (7 + 4i)^n \quad \dots 1p$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{n-1} = \left(\frac{1+8i}{2+3i} \right)^n + \left(\frac{7+4i}{2+3i} \right)^n \quad \dots 2p$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{n-1} = \left(\frac{26+13i}{13} \right)^n + \left(\frac{26-13i}{13} \right)^n$$

$$\Leftrightarrow 2 \cdot 3^{n-1} = (2 + i)^n + (2 - i)^n \quad \dots 1p$$

Problema 2: soluție orientativă

a) $\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{\frac{n}{2}(a_1 + a_n)}{n} = \frac{a_1 + a_n}{2} \quad \dots 1p$

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \geq \sqrt{a_1 a_n} \quad \text{din inegalitatea mediilor}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt{a_1 a_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dots 1p$$

b) Funcția $\lg x, x \in (0, \infty)$ este concavă.1p

Din inegalitatea lui Jensen $\Rightarrow \lg \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \geq \frac{\lg b_1 + \lg b_2 + \dots + \lg b_n}{n} \quad (1) \quad \dots 2p$

$$b_k = b_1 \cdot q^{k-1}, \forall k \geq 2 \Rightarrow \lg b_k = \lg b_1 + (k-1) \lg q, \forall k \geq 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lg b_n)_{n \geq 1} \text{ este progresie aritmetică cu rația } \lg q. \quad \dots 1p$$

În (1) putem aplica punctul (a)

$$\lg \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \geq \frac{\lg b_1 + \lg b_2 + \dots + \lg b_n}{n} \geq \sqrt{\lg b_1 \lg b_n}, \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \dots 1p$$

Problema 3: soluție orientativă

a) Se arată că funcția $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ 1p

Funcția f este strict descrescătoare întrucât este compunerea a două funcții de monotonii diferite.1p

b) f strict descrescătoare, deci injectivă1p

Se arată că f este surjectivă și se determină $f^{-1}: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-\infty, 0]$, $f^{-1}(x) = \frac{1+\sin x}{\sin x - 1}$ 1p

c) $f\left(\frac{1}{x}\right) = -\arcsin \frac{1+x}{x-1} \Rightarrow f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0, \forall x \in (-\infty, -1)$ 1p

$$x-1 < x \Rightarrow f(x-1) > f(x)$$

$$\frac{1}{x+1} < \frac{1}{x} \Rightarrow f\left(\frac{1}{x+1}\right) > f\left(\frac{1}{x}\right)$$

Adunând termen cu termen rezultă $f(x-1) + f\left(\frac{1}{x+1}\right) > 0$ 1p

$$\text{Cum } f^{-1}: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (-\infty, -1) \Rightarrow f^{-1}\left(\frac{1}{x}\right) < 0$$

$$\Rightarrow f(x-1) + f\left(\frac{1}{x+1}\right) > f^{-1}(x), \forall x \in (-\infty, -1) \quad \dots 1p$$

Problema 4: soluție orientativă

Fie punctele $A_1(z_1), A_2(z_2), A_3(z_3)$. Triunghiul $A_1A_2A_3$ este înscris într-un cerc de rază r1p

Fie $A(z)$, $z = az_2 + (1-a)z_3 \Rightarrow A \in A_2A_3$1p

Fie B piciorul perpendicularei dusă din A_1 pe A_2A_3 .

$A_1A \geq A_1B \Rightarrow \min_{a \in \mathbb{R}} |z - z_1| = \min_{a \in \mathbb{R}} |az_2 + (1-a)z_3 - z_1| = A_1B = h$, unde h este înălțimea dusă din A_1 în $\Delta A_1A_2A_3$1p

$$S = \frac{1}{2} |z_2 - z_3| \cdot h = \frac{1}{2} |z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3| \cdot \sin \angle A_2A_1A_3, \text{ unde } S \text{ este suprafața } \Delta A_1A_2A_3. \quad \dots 1p$$

$$\Rightarrow h = \frac{|z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3| \cdot \sin \angle A_2A_1A_3}{|z_2 - z_3|} \quad \dots 1p$$

Aplicând teorema sinusurilor rezultă:

$$\frac{|z_2 - z_3|}{\sin \angle A_2A_1A_3} = 2r \Rightarrow \sin \angle A_2A_1A_3 = \frac{|z_2 - z_3|}{2r} \quad \dots 1p$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{2r} |z_1 - z_2| \cdot |z_1 - z_3|$$

$$\Rightarrow \min_{a \in \mathbb{R}} |az_2 + (1-a)z_3 - z_1| = \frac{1}{2r} |z_1 - z_2| \cdot |z_2 - z_3| \quad \dots 1p$$

Notă: Orice altă soluție corectă se punctează corespunzător.