

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ – 16 februarie 2020
Clasa a VIII-a

SUBIECTUL 1

1. (1p) Arătați că $a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$, $(\forall) a \in \mathbb{R}$

2. Fie $E(x) = \left(\frac{2x+1}{2x+3} + \frac{1-2x}{3-2x} - \frac{8x+8}{9-4x^2} \right) : \left(\frac{4x^3-4x^2-9x+9}{4x^3-4} \right)^{-1}$, $(\forall) x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1 \right\}$.

a) (4p) Să se arate că $E(x) < 2$, $(\forall) x \in \mathbb{R} - \left\{ -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 1 \right\}$;

b) (2p) Să se afle valorile reale ale lui x pentru care $E(x)$ este număr întreg.

SUBIECTUL 2

(7p) Se consideră mulțimile: $A = \{ \text{---} \}$ și $B = \{ \text{---} \}$. Să se arate că $B \subset A$.

SUBIECTUL 3

Prisma patrulateră regulată $ABCD A'B'C'D'$ are baza pătratul $ABCD$ de latură 6 cm. Punctele P și Q sunt situate pe muchiile BB' și CC' așa încât suma lungimilor segmentelor AP , PQ și $D'Q$ să fie minimă, iar $[AP]$ să fie bisectoarea unghiului $B'AB$.

a) (4p) Să se afle înălțimea prisme;

b) (3p) Dacă dreapta CC' intersectează planul $(AP\{D\})$ în punctul S , să se afle lungimea segmentului $[SQ]$.

SUBIECTUL 4

Se consideră punctele necoplanare A, B, C și D așa încât $AB=AC=9\text{ cm}$, $BD=CD=5\text{ cm}$, $BC=6\text{ cm}$ și $AD=8\text{ cm}$.

- a) (5p) Să se afle distanța de la punctul D la planul (ABC) ;
- b) (2p) Să se afle lungimea segmentului $[DM]$ știind că dreapta DM este perpendiculară pe planul (ABC) și că distanțele de la punctul M la planele (ABC) și (DBC) sunt egale.

Timp de lucru 3 ore.

Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.