S.S.M.R - FILIALA MURES
Olimpiada de matematică
Faza locală 9.02.2013
Clasa a X-a Barem

Problema 1:

Arătaţi că $a^{\sqrt{\log_a b}}+b^{\sqrt{\log_b a}}\leq a+b$ ***pentru orice numere a,b>1.***

Soluţia

Oficiu 1p

Presupunem ca a<b.

Se demonstrează că $a^{\sqrt{\log_a b}}=b^{\sqrt{\log_b a}}$ 2p

Notăm $\sqrt{\log_a b}=x>1$

Inegalitatea devine $a^x+a^x\leq a+a^{\log_a b}$ 1p

Deci $2\cdot a^x\leq a+a^{x^2}\Leftrightarrow \dfrac{a+a^{x^2}}{2}\geq a^x$ 1p

Din inegalitatea mediilor obţinem $\dfrac{a+a^{x^2}}{2}\geq\sqrt{a\cdot a^{x^2}}=\sqrt{a^{x^2+1}}$ 1p

Avem că $\sqrt{a^{x^2+1}}\geq a^x\Leftrightarrow a^{x^2+1}\geq a^{2x}\Leftrightarrow x^2+1\geq 2x\Leftrightarrow (x-1)^2\geq 0$ 1p

Problema 2:

Fie p,q $\in C$ ***şi*** $q\neq 0$***. Ştiind că ecuaţia*** $x^2+px+q=0$ ***are rădăcinile cu acelaşi modul, să se arate ca*** $\dfrac{p^2}{q}\in[0;4]$***.***

Soluţia

Oficiu 1p

Rădăcinile ecuaţiei sunt $x_1=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)$ şi $x_2=r(\cos\beta+i\sin\beta)$ 1p

$x_1+x_2=r[(\cos\alpha+\cos\beta)+i(\sin\alpha+\sin\beta)]=-p$,....................................2p

$$x_1 + x_2 = 2r\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + i\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

$x_1 \cdot x_2 = r^2[\cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta)] = q$ 2p

$\frac{p^2}{q} = 4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} \in [0;4]$..1p

Problema 3:

Fie $a,b,c,d \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ și $x,y,z,t \in \mathbb{R}$ astfel încât $a^x = bcd,\ b^y = cda,\ c^z = dab,\ d^t = abc.$ Demonstrați că:

$$\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+t} = 1.$$

Soluție

Oficiu 1p

Avem $x = \frac{\lg(bcd)}{\lg a}$ 2p

$1 + x = 1 + \frac{\lg(bcd)}{\lg a} = \frac{\lg abcd}{\lg a}$ și analoagele 2p

Atunci $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1+t} = \frac{\lg a}{\lg abcd} + \frac{\lg b}{\lg abcd} + \frac{\lg c}{\lg abcd} + \frac{\lg d}{\lg abcd} =$

$= \frac{\lg abcd}{\lg abcd} = 1$ 2p

Problema 4:

Să se studieze bijectivitatea funcţiei $f: R \to R$ ***cu proprietatea***

2f(3-2x)+f(2x-2)=x, x $\in R$

Soluţia

Oficiu 1p

Pentru 3-2x=y obţinem $x = \frac{3-y}{2}$ 1p

Inlocuind în relaţia din enunţ pe x cu $\frac{3-y}{2}$ se obţine relaţia

(1) $2f(y) + f(1-y) = \frac{3-y}{2}$ 2p

Pentru orice altă rezolvare corectă se acordă punctaj maxim

Pentru 2x-2=y obţinem $x = \frac{y+2}{2}$

Inlocuind în relaţia din enunţ pe x cu $\frac{y+2}{2}$ se obţine relaţia

(2) 2f(1-y)+f(y)=$\frac{y+2}{2}$ ……………………………………………………..2p

Rezolvând sistemul dat de relaţiile (1) şi (2) se află f(y)=$\frac{4-3y}{6}$ (3)

Se demonstrează ca funcţia $f : R \to R, f(x) = \frac{4-3x}{6}$ este bijectivă……….1p

Pentru orice altă rezolvare corectă se acordă punctaj maxim