



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

Clasa a X – a

PROBLEMA 1. Să se determine funcția $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$f\left(\frac{x}{2015}\right) \leq \log_{2015} x \leq f(x) - 1, \quad \forall x \in (0, +\infty).$$

PROBLEMA 2. a) Există numere iraționale a și b pentru care a^b este număr natural?

b) Un elev scrie pe tablă numerele 729, 15625, 343, 1331. La pasul 1 șterge cele patru numere și în locul fiecăruia scrie media geometrică a celorlalte trei numere. La pasul 2 aplică pasul 1 pentru numerele astfel obținute. Continuă în același mod scrierea numerelor.

i) Ce numere a obținut după primul pas?

ii) Este posibil ca după un număr finit de pași să scrie pe tablă numerele 847, 567, 297, 8019?

PROBLEMA 3. Fie numerele $a, b \in \mathbb{Z}$ și $z \in \mathbb{C}$, astfel încât $z^2 - z + 5 = 0$. Să se arate că

$$(z - 1)^a - (z + 4)^b = 0$$

dacă și numai dacă există un număr $n \in \mathbb{Z}$, astfel încât $a = 4n$ și $b = 2n$.

PROBLEMA 4. Să se arate că, dacă $a, b, c \in \mathbb{C}$, $|a| = |b| = |c| = 1$ și $|a + b|^2 + |b + c|^2 + |c + a|^2 = 4$, atunci triunghiul ABC ale cărui vârfuri sunt punctele de afixe a, b și c este dreptunghic.

¹Timpul efectiv de lucru este de 3 ore;

²Toate problemele sunt obligatorii;

³Fiecare problemă se notează de la 0 la 7.