



OLIMPIADA DE MATEMATICĂ – ETAPA LOCALĂ

16 februarie 2014-CLASA a IX-a

1. Dacă a, b, c sunt numere strict pozitive atunci:

a) $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^2 + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2 \geq 8$. b) $\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq \frac{2ab}{b^2+ca} + \frac{2bc}{c^2+ab} + \frac{2ac}{a^2+bc}$.

2. Dacă $[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x atunci:

a) Rezolvați ecuația: $\left[\frac{2x+1}{3}\right] + \left[\frac{4x+5}{6}\right] = \frac{5x+1}{3}$.

b) Arătați că: $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[2x + \frac{1}{2}\right] + \dots + \left[2^{2013}x + \frac{1}{2}\right] = [2^{2014}x]$.

3. a) Șirul $(x_n)_{n \geq 1}$ verifică egalitatea: $x_1 + x_2 + \dots + x_n = an^2 + bn, \forall n \in \mathbb{N}^*, a, b \in \mathbb{R}$.

Să se demonstreze că acest șir este o progresie aritmetică.

b) Dacă n numere prime formează o progresie aritmetică, atunci rația progresiei se divide prin fiecare număr prim $p < n$.4. Fie ABC un triunghi și H ortocentrul, iar D, E, F simetricele lui H față de mijloacele laturilor $(BC), (AC), (AB)$. Arătați că dacă triunghiurile ABC și DEF au același centru de greutate atunci triunghiul ABC este echilateral.

(Supliment Gazeta matematică nr.12/ 2013)

Toate subiectele sunt obligatorii.**Timp de lucru 3 ore.****Fiecare subiect rezolvat corect se notează cu 7 puncte.**