

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 16 FEBRUARIE 2019
CLASA A X-A, SOLUȚII ȘI BAREME ORIENTATIVE

1. Considerăm un număr real pozitiv, fixat, a . Arătați că toate numerele complexe z , ce au $\operatorname{Re} z \geq a$, verifică inegalitatea $\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{a} \right| < \frac{2}{a}$.

Gazeta Matematică

Soluție:

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{a} \right| < \frac{2}{a} \Leftrightarrow \frac{|2z - a|}{a \cdot |z|} < \frac{2}{a} \Leftrightarrow |2z - a| < 2|z| \Leftrightarrow |2z - a|^2 < 4|z|^2 \Leftrightarrow \dots\dots\dots 3p$$

$$\Leftrightarrow (2z - a)\overline{(2z - a)} < 4z \cdot \bar{z} \Leftrightarrow a^2 < 2a(z + \bar{z}) \Leftrightarrow a^2 < 4a \cdot \operatorname{Re} z \Leftrightarrow a < 4\operatorname{Re} z \text{ (A)} \dots\dots\dots 4p$$

2. Rezolvați ecuația $x^3 - 6 = 11\sqrt[3]{6 + 11x}$.

Roxandra Murea, Brăila

Soluție:

Notăm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3 - 6}{11}$; deoarece funcția f este strict crescătoare, rezultă că este injectivă și surjectivă, deci f este bijectivă; există f^{-1} strict crescătoare.....1p

$$f(x) = y \Leftrightarrow x^3 - 6 = 11y \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{6 + 11y} = f^{-1}(y), \text{ deci}$$

$$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{6 + 11x} \Rightarrow f^{-1}(x) = f(x) \Leftrightarrow f(x) = x \dots\dots\dots 3p$$

Presupunem că $f(x) < x \Rightarrow x < f^{-1}(x)$
 $f(x) > x \Rightarrow x > f^{-1}(x)$. Obținem $f(x) = x \dots\dots\dots 1p$

$$\frac{x^3 - 6}{11} = x \Leftrightarrow x^3 - 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)(x^2 - 3x - 2) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{ -3, \frac{3 \pm \sqrt{17}}{2} \right\} \dots\dots\dots 2p$$

3. Fie $x, y, z \in (1, +\infty)$. Demonstrați că $\log_{yz^2} x + \log_{zx^2} y + \log_{xy^2} z \geq 1$.

Carmen și Viorel Botea, Brăila

Soluție:

Inegalitatea se scrie echivalent $\frac{\lg x}{\lg y + 2\lg z} + \frac{\lg y}{\lg z + 2\lg x} + \frac{\lg z}{\lg x + 2\lg y} \geq 1 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{\lg^2 x}{\lg x \lg y + 2\lg x \lg z} + \frac{\lg^2 y}{\lg y \lg z + 2\lg y \lg x} + \frac{\lg^2 z}{\lg z \lg x + 2\lg z \lg y} \geq 1 \dots\dots\dots 2p$$

Avem:

$$\frac{\lg^2 x}{\lg x \lg y + 2\lg x \lg z} + \frac{\lg^2 y}{\lg y \lg z + 2\lg y \lg x} + \frac{\lg^2 z}{\lg z \lg x + 2\lg z \lg y} \geq \frac{(\lg x + \lg y + \lg z)^2}{3(\lg x \lg y + \lg x \lg z + \lg y \lg z)}$$

conform inegalității lui Bergstrom.....3p

Din $(a + b + c)^2 \geq 3(ab + ac + bc)$ obținem $\frac{(\lg x + \lg y + \lg z)^2}{3(\lg x \lg y + \lg x \lg z + \lg y \lg z)} \geq 1 \dots\dots\dots 2p$

4. Rezolvați ecuația $2019^{x^2-2019x} + \frac{x^2-2019x}{2019^x} = 1.$

Giurcă Mihaela Florina, Brăila

Soluție:

$$2019^{x^2-2018x} + x^2 - 2018x = 2019^x + x \dots\dots\dots 2p$$

Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2019^x + x \Rightarrow f$ este funcție strict crescătoare, deci f este injectivă. 2p

$$f(x^2 - 2018x) = f(x) \Rightarrow x^2 - 2018x = x \Rightarrow x \in \{0, 2019\} \dots\dots\dots 3p$$