

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapă locală Dâmbovița, 28 februarie 2015
SUBIECT ȘI BAREM ORIENTATIV DE NOTARE

CLASA A IX-A

Varianta 1

Subiectul 1. Se consideră o mulțime $G \subset \mathbb{R}$ care satisface simultan proprietățile:

a) $1 \in G$

b) $x \in G \Rightarrow \sqrt{x+2} \in G$

c) $\sqrt{x+3} \in G \Rightarrow x+4 \in G$

Arătați că $\sqrt{2015} \in G$.

Soluție.

$$1 \in G \xRightarrow{b)} \sqrt{3} \in G \xRightarrow{c)} 4 \in G \xRightarrow{b)} \sqrt{6} \in G \xRightarrow{c)} 7 \in G \xRightarrow{b)} \sqrt{9} = 3 \in G \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

Fie $P(n) : 3n \in G, n \in \mathbb{N}^*$. $P(1)$ este deci adevărată.....1 p

Arătăm $P(n) \Rightarrow P(n+1)$

$$\text{Dacă } 3n \in G \xRightarrow{b)} \sqrt{3n+2} \in G \xRightarrow{c)} 3n+3 \in G, \text{ adică } P(n+1) \text{ este adevărată} \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$2013 : 3 \Rightarrow 2013 \in G \Rightarrow \sqrt{2015} \in G \dots\dots\dots 2 \text{ p}$$

Subiectul 2. Fie $a, b, c, n > 0$ cu $a + b + c = 1$. Demonstrați inegalitatea:

$$\frac{a}{bc(b+nc)} + \frac{b}{ca(c+na)} + \frac{c}{ab(a+nb)} \geq \frac{27}{n+1}$$

Soluție.

Cu inegalitatea Cauchy – Buniakovski (forma Titu Andreescu)

$$\frac{a}{bc(b+nc)} + \frac{b}{ca(c+na)} + \frac{c}{ab(a+nb)} = \frac{a^2}{abc(b+nc)} + \frac{b^2}{abc(c+na)} + \frac{c^2}{abc(a+nb)} \geq \dots\dots\dots 1 \text{ p}$$

$$\geq \frac{(a+b+c)^2}{abc(a+b+c)(n+1)} = \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

$$= \frac{1}{abc(n+1)} \geq \frac{27}{n+1} \dots\dots\dots 3 \text{ p}$$

(la ultima inegalitate, din inegalitatea mediilor $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq abc \Rightarrow \frac{1}{27} \geq abc \Rightarrow \frac{1}{abc} \geq 27$)

Subiectul 3. Să se rezolve ecuațiile:

a) $x = \frac{\{x\}}{[x]}$

b) $[x] \cdot \{x\} = [x] - \{x\}$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x și $\{x\}$ partea fracționară a lui x .

Soluție.

a) $[x] \neq 0 \Rightarrow x \notin [0, 1)$ 1 p

$x \geq 1 \Rightarrow x \cdot [x] \geq 1 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții.....1 p

$x \leq -1 \Rightarrow x \cdot [x] \geq 1 \Rightarrow$ ecuația nu are soluții.....1 p

$x \in (-1, 0) \Rightarrow$ ecuația $-x = \{x\}$ are soluția $x = -\frac{1}{2}$ 1 p

b) Pentru $[x] = k \in \mathbb{Z}$, $\{x\} = \alpha \in [0, 1)$ ecuația devine $\alpha(k+1) = k$ 1 p

Pentru $k = -1$, ecuația nu are soluții.....1 p

Pentru $k \neq -1$, ecuația are soluțiile $x = \frac{k^2 + 2k}{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}$ 1 p

Subiectul 4. Fie ABC un triunghi în care $(b+c)\overrightarrow{PA} + (c+a)\overrightarrow{PB} + (a+b)\overrightarrow{PC} = \vec{0}$, unde $P \in \{O, I, G\}$. Demonstrați că triunghiul ABC este echilateral. (Notățiile sunt cele uzuale.)

Soluție.

Dacă $P = O$, atunci $(a+b+c)(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OI}$ 2 p

Dacă $P = I$, atunci $(a+b+c)(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = \vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{IG} = \vec{0}$ 3 p

Dacă $P = G$, atunci $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Rightarrow (a-c)\overrightarrow{GA} + (b-c)\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow a = b = c$ 2 p