

Olimpiada de Matematică –etapa locală- Galați

28 februarie 2016

Clasa a XII-a

Barem de evaluare

- ♦ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul maxim corespunzător.
- ♦ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Nr. problemei	Soluție, rezolvare	Punctaj
1.	$a) \int f(x) dx = \int \frac{x^3 - 1}{(x^3 + 2)^2 + a \cdot x^2} dx = \int \frac{x^3 - 1}{x^2 \cdot \left[\left(x^2 + \frac{2}{x} \right)^2 + a \right]} dx =$ $= \int \frac{x - \frac{1}{x^2}}{\left(x^2 + \frac{2}{x} \right)^2 + a} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{\left(x^2 + \frac{2}{x} \right)'}{\left(x^2 + \frac{2}{x} \right)^2 + a} dx = \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x^2 + \frac{2}{x}}{\sqrt{a}} + C.$	3p
	Forma primitivei F este: $F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x^2 + \frac{2}{x}}{\sqrt{a}} + C_1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x^2 + \frac{2}{x}}{\sqrt{a}} + C_2, & x > 0 \end{cases}$ Funcția F este continuă în $x=0 \Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} F(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} F(x) = F(0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4\sqrt{a}} + C_1 = 0 \Rightarrow C_1 = \frac{\pi}{4\sqrt{a}};$ $\frac{\pi}{4\sqrt{a}} + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = -\frac{\pi}{4\sqrt{a}}.$ Deci $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x^2 + \frac{2}{x}}{\sqrt{a}} + \frac{\pi}{4\sqrt{a}}, & x < 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{a}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x^2 + \frac{2}{x}}{\sqrt{a}} - \frac{\pi}{4\sqrt{a}}, & x \geq 0 \end{cases}$	1p

	b). Pentru că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \frac{1}{2}$, scriem funcția f sub forma: $f(x) = \begin{cases} \left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + x + 1}} - \frac{1}{2} \right) \cdot \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} + \frac{1}{2} \cdot \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ Notăm $g(x) = \begin{cases} \left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + x + 1}} - \frac{1}{2} \right) \cdot \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ și $h(x) = \begin{cases} \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ Funcția g este continuă pe $\mathbb{R}$ ca produs de funcții continue și $0 \leq \left \left(\frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + x + 1}} - \frac{1}{2} \right) \cdot \cos \frac{1}{x} \right \leq \left \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + x + 1}} - \frac{1}{2} \right \text{ și } \lim_{x \rightarrow 0} \left \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + x + 1}} - \frac{1}{2} \right = 0,$ obținem $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$. Din g continuă pe $\mathbb{R}$, rezultă că g admite primitive pe $\mathbb{R}$	1p
	Arătăm că funcția h admite primitive pe $\mathbb{R}$. Funcția $T(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este derivabilă pentru $x \neq 0$ și $T'(x) = 2 \cdot x \cdot \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ și $T'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{T(x) - T(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin \frac{1}{x} = 0.$ Obținem că $(\forall) x \in \mathbb{R}, T'(x) = \begin{cases} 2 \cdot x \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} - h(x)$ sau $h(x) = -T'(x) + p(x)$, unde $p(x) = \begin{cases} 2 \cdot x \cdot \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ este continuă pe $\mathbb{R}$. Fie $P'(x) = p(x)$, atunci $h(x) = (P(x) - T(x))'$, adică h admite primitive. Pentru că funcțiile g și h admit primitive pe $\mathbb{R}$, rezultă că $f(x) = g(x) + \frac{1}{2} \cdot h(x)$ admite primitive pe $\mathbb{R}$.	1p

	Pentru mărginire, observăm că $f(x) \leq \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ Fie $\varphi(x) = \frac{x + \frac{1}{2}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$, $x \in \mathbb{R}$ care este derivabilă, $\varphi'(x) = \frac{3}{4 \cdot (\sqrt{x^2 + x + 1})^3} > 0 \Rightarrow \varphi$ este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$. Cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -1$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 1$. Observăm că $\varphi(x) < 1$. Deci $f(x) < 1 \Leftrightarrow -1 < f(x) < 1$; $-1 = \inf f(x)$ pentru că $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$; $1 = \sup f(x)$ pentru că $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$. Deci f nu își atinge marginile pe $\mathbb{R}$.	1p
	a). $\varepsilon = \frac{1}{2} + \frac{i \cdot \sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow \varepsilon^3 = -1$ și $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0$ $\mathbb{Z}[\varepsilon]$ este parte stabilă în raport cu înmulțirea dacă: $(\forall) z_1 = a_1 + b_1 \cdot \varepsilon, z_2 = a_2 + b_2 \cdot \varepsilon \in \mathbb{Z}[\varepsilon] \Rightarrow z_1 \cdot z_2 \in \mathbb{Z}[\varepsilon]$ $z_1 \cdot z_2 = a_1 \cdot a_2 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot \varepsilon + b_1 \cdot b_2 \cdot \varepsilon^2 = a_1 \cdot a_2 + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1) \cdot \varepsilon + b_1 \cdot b_2 \cdot (\varepsilon - 1) = (a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2) + (a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + b_1 \cdot b_2) \cdot \varepsilon \in \mathbb{Z}[\varepsilon]$, unde $a_i, b_i \in \mathbb{Z}$, $i=1,2$. Cum înmulțirea este asociativă pe $\mathbb{C}$ și $\mathbb{Z}[\varepsilon] \subset \mathbb{C} \Rightarrow$ înmulțirea este asociativă pe $\mathbb{Z}[\varepsilon]$. $1 = 1 + 0 \cdot \varepsilon \in \mathbb{Z}[\varepsilon]$ și $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$, $(\forall) z \in \mathbb{Z}[\varepsilon]$.	3p
2.	b). Fie $z = a + b \cdot \varepsilon$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $z \neq 0$. Dacă z este inversabil $\Rightarrow (\exists) z^{-1} = x + y \cdot \varepsilon$, $x, y \in \mathbb{Z}$, astfel încât $z \cdot z^{-1} = 1 \Rightarrow z \cdot z^{-1} = 1 \Rightarrow$ $\left. \begin{aligned} (a^2 + a \cdot b + b^2) \cdot (x^2 + x \cdot y + y^2) &= 1 \\ \text{Dar } a, b, x, y &\in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\} \Rightarrow a^2 + a \cdot b + b^2 = 1$ $a^2 + a \cdot b + b^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + a \cdot b + b^2 - 1 = 0$, $\Delta_a \geq 0$ și $\Delta_a =$ pătrat perfect; $\left. \begin{aligned} \Delta_a = 4 - 3 \cdot b^2 &\geq 0 \\ b &\in \mathbb{Z} \end{aligned} \right\} \Leftrightarrow b^2 \in \{0, 1\}$ $b^2 = 0 \Rightarrow b = 0 \Rightarrow a = \pm 1 \Rightarrow z_1 = 1, z_2 = -1$ $b^2 = 1 \Rightarrow b = \pm 1$; $b = 1 \Rightarrow a \in \{-1, 0\} \Rightarrow z_3 = -1 + \varepsilon, z_4 = \varepsilon$; $b = -1 \Rightarrow a \in \{0, 1\} \Rightarrow z_5 = -\varepsilon, z_6 = 1 - \varepsilon$.	2p

	c) $U(\mathbb{Z}[\varepsilon]) = \{1, -1, \varepsilon, -\varepsilon, -1+\varepsilon, 1-\varepsilon\}$ Din $\varepsilon^2 - \varepsilon + 1 = 0 \Rightarrow \varepsilon^2 = \varepsilon - 1, \varepsilon^3 = -1, \varepsilon^4 = -\varepsilon, \varepsilon^5 = -\varepsilon^2 = 1 - \varepsilon;$ $U(\mathbb{Z}[\varepsilon]) = \{1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5\};$ Definim funcția $f : U(\mathbb{Z}[\varepsilon]) \rightarrow \mathbb{Z}_6, f(\varepsilon^k) = \hat{k}, (\forall) k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$ Evident, funcția f este bijectivă (f este surjectivă, iar domeniul de definiție și codomeniul au același cardinal). $f(\varepsilon^k \cdot \varepsilon^h) = f(\varepsilon^{k+h}) = f(\varepsilon^{(k+h) \bmod 6}) = \hat{k+h} = \hat{k} + \hat{h} = f(\varepsilon^k) + f(\varepsilon^h),$ $(\forall) k, h \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$ Metoda 2. Grupurile $(U(\mathbb{Z}[\varepsilon]), \cdot)$ și $(\mathbb{Z}_6, +)$ sunt grupuri ciclice finite, cu același cardinal $\Rightarrow$ ele sunt izomorfe.	2p
3.	Fie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(t) = e^t + t$ funcție continuă, strict crescătoare. Pentru că $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^t + t) = -\infty$ și $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^t + t) = \infty \Rightarrow g$ este bijectivă. (g este strict monotonă $\Rightarrow g$ este injectivă și $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \Rightarrow g$ surjectivă). $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este strict crescătoare (fie $y_1 < y_2$ și există $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ astfel încât $g(x_1) = y_1, g(x_2) = y_2$). Din $g(x_1) < g(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2 \Leftrightarrow g^{-1}(y_1) < g^{-1}(y_2).$ Din ipoteză $g(f(x)) \leq x, (\forall) x \in \mathbb{R}$ și folosind g^{-1} strict crescătoare $\Rightarrow f(x) \leq g^{-1}(x).$ Integrând pe $[1, e+1]$, obținem $\int_1^{1+e} f(x) dx \leq \int_1^{1+e} g^{-1}(x) dx.$	4p
	Calculăm $\int_1^{1+e} g^{-1}(x) dx$ prin schimbare de variabilă: $g^{-1}(x) = t \Rightarrow x = g(t).$ Pentru $x=1 \Rightarrow t=0;$ pentru $x=1+e \Rightarrow t=1.$ $g'(t) dt = dx$ $\int_1^{1+e} g^{-1}(x) dx = \int_0^1 t \cdot g'(t) dt = t \cdot g(t) \Big _0^1 - \int_0^1 g(t) dt = e+1 - \int_0^1 (e^t + t) dt = e+1 - e^t \Big _0^1 - \frac{t^2}{2} \Big _0^1 =$ $e+1 - e + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$	3p

4.	Vom arăta că $x^{2n-1} \cdot y = y \cdot x^{2n-1}$, $(\forall) x, y \in G$. $x^{2n-1} \cdot y = x^{2n} \cdot (x^{-1} \cdot y)$; Pentru că f este surjectivă $\Rightarrow (\exists) u \in G$, $f(u) = x^{-1} \cdot y \Leftrightarrow u^{2n} = x^{-1} \cdot y$ $x^{2n} \cdot (x^{-1} \cdot y) = x^{2n} \cdot u^{2n} = (x \cdot u)^{2n} = x \cdot (u \cdot x)^{2n-1} \cdot u = x \cdot (u \cdot x)^{2n} \cdot (u \cdot x)^{-1} \cdot u =$ $x \cdot u^{2n} \cdot x^{2n} \cdot x^{-1} \cdot u^{-1} \cdot u = x \cdot x^{-1} \cdot y \cdot x^{2n} \cdot x^{-1} \cdot u^{-1} \cdot u = y \cdot x^{2n-1}$ Deci $x^{2n-1} \cdot y = y \cdot x^{2n-1}$, $(\forall) x, y \in G$; Analog, se arată că $x^{3n-1} \cdot y = y \cdot x^{3n-1}$, $(\forall) x, y \in G$	4p
	Fie $d = (2n-1, 3n-1) \Rightarrow d \mid (2n-1)$ și $d \mid (3n-1)$, deci $d \mid (3n-1) - (2n-1) \Rightarrow d \mid n$; Cum $d \mid 2n$ și $d \mid 2n-1$, rezultă că $d \mid 1$, adică $(2n-1, 3n-1) = 1$. Din caracterizarea celui mai mare divizor comun a două numere întregi, rezultă că există $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $(2n-1) \cdot a + (3n-1) \cdot b = 1$; Fie $x, y \in G$. $x \cdot y = x^{(2n-1)a + (3n-1)b} \cdot y = (x^a)^{2n-1} \cdot (x^b)^{3n-1} \cdot y = (x^a)^{2n-1} \cdot y \cdot (x^b)^{3n-1}$ $= y \cdot (x^a)^{2n-1} \cdot (x^b)^{3n-1} = y \cdot x^{(2n-1)a + (3n-1)b} = y \cdot x$.	3p