



**Olimpiada de Matematică – Etapa Locală
Maramureș – 29 februarie 2020
Clasa a VI-a - a**

Barem de corectare și notare

1. Produsul a două numere este 2028. Aflați numerele știind că cel mai mare divizor comun al lor este 13.

Fie a, b cele două numere

$a \cdot b = 2028$ 1p
 $(a,b)=13 \Rightarrow a=13k, b=13k', (k, k')=1$ 1p
 $13k \cdot 13k' = 2028 \Rightarrow 169 kk' = 2028 \Rightarrow kk' = 12$ 1p
 $k=1, k'=12 \Rightarrow a=13, b=156$ 1p
 $k=3, k'=4 \Rightarrow a=39, b=52$ 1p
 $k=4, k'=3 \Rightarrow a=52, b=39$ 1p
 $k=12, k'=1 \Rightarrow a=156, b=13$ 1p

2. Determinați cel mai mic număr natural care începe cu 2020, se termină cu 2020 și care are suma cifrelor 2020.

Dacă numărul începe și se termină cu 2020, acesta va fi de forma $n=2020\ldots2020$ 1p
 Suma cifrelor de pe primele și ultimele 4 poziții ale lui n este 8 1p
 Atunci suma celorlalte cifre ale numărului va fi $2020 - 8 = 2012$ 1p
 Pentru ca n să fie cel mai mic, trebuie să conțină cât mai multe cifre de 9 1p
 $2012 : 9 = 223 \text{ rest } 5$ 1p
 Numărul va conține pe prima din pozițiile rămase cifra 5, iar apoi 223 cifre de 9 1p
 Numărul va fi $n = 2020599 \ldots 992020$ 1p

3. Fie punctele A, B, C, D, O în plan. Unghiul $\sphericalangle BOD$ este alungit, punctele A și C de o parte și de alta a dreptei BO astfel încât măsura unghiului $\sphericalangle DOC$ este egală cu pătratul măsurii unghiului $\sphericalangle AOD$, iar măsura unghiului $\sphericalangle BOC$ este cu 90° mai mare decât măsura unghiului $\sphericalangle AOD$. Aflați măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOD$, $\sphericalangle BOA$, $\sphericalangle DOC$ și $\sphericalangle COB$, știind că aceste măsuri sunt numere naturale.

(prof. Melania Dobrican)

Vom trata situația când punctul A se află în semiplanul superior delimitat de dreapta BO, iar C în cel inferior, situația inversă se tratează identic.

Din datele problemei, avem $m(\sphericalangle BOD) = 180^\circ$ 1p

Fie $m(\sphericalangle AOD) = x$, atunci $m(\sphericalangle DOC) = x^2$, $m(\sphericalangle BOC) = 90^\circ + x \Rightarrow x + x^2 = 90^\circ \Rightarrow$

$x(x+1) = 90^\circ$, de unde $x = 9$ $m(\sphericalangle AOD) = 9$, 2p

Deducem că $m(\sphericalangle BOA) = 180^\circ - x = 171^\circ$ 2p

$m(\sphericalangle DOC) = 81^\circ$ și $m(\sphericalangle COB) = 99^\circ$ 2p

4. Se consideră mulțimea $A = \{1, 2, 3, \dots, 2020\}$. Câte submulțimi ale lui A cu 2018 elemente au suma elementelor divizibilă cu 505.

(G.M.nr 1/2020- Gheorghe Rotaru , Dorohoi)



$$A \quad (2020 \cdot 2021) : 2 = 505 \cdot 4042$$

Suma elementelor mulțimii este

Submulțimile cu 2018 elemente care au suma elementelor divizibilă cu 505 sunt

submulțimile lui A obținute eliminând două elemente din A care au suma :

505- perechile sunt: (1,504), (2,503).....(252,253)-----.....252 submulțimi.....1p

1010- perechile sunt: (1,1009), (2,1008).....(504,506)-----504 submulțimi.....1p

1515- perechile sunt: (1,1514), (2,1513).....(757,758)-----757 submulțimi.....1p

2020- perechile sunt: (1,2019), (2,2018).....(1009,1011)---1009 submulțimi.....1p

2525- perechile sunt: (505,2020), (506,2019)....(1262,1263)-----758 submulțimi.....1p

3030- perechile sunt: (1010,2020), (1011,2019)...(1514,1516)-----505 submulțimi.....1p

3535- perechile sunt: (1515,2020), (1516,2019)...(1767,1768)-----253 submulțimi

Nr.submulțimilor este $252+504+757+1009+758+505+253=4038$1p