OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 9 FEBRUARIE 2013

Clasa a VIII-a

Problema 1. a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\left[x+1\right]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=\frac{2x+3}{2}.$

Gheorghe Fianu, Perișoru

b) Fie $n\in\mathbb{N}^*$ și $x_1,x_2,x_3,........x_n\in\{-2013;2013\}$. Să se determine mulțimea numerelor naturale n pentru care este adevărată egalitatea $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+........+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0.$

Lucian Ioniță, Călărași

Problema 2. Dacă $a,\ b,\ c\in\mathbb{R},\ \ a\neq b$ cu proprietatea $a^2\left(b+c\right)=b^2\left(a+c\right)=2013,$ demonstrați că $c^2\left(a+b\right)=2013.$

Gheorghe Stoianovici, Călărași

Problema 3. Fie $a>0$ și piramida patrulateră regulată $SABCD$ în care muchia bazei are lungimea a și lungimea înălțimii piramidei este $2a$. Daca M este mijlocul laturii $[BC]$ și măsura unghiului dintre dreapta SB și planul (SAC) este α, aflați:

a) distanța de la punctul S la dreapta DM;

b) lungimea proiecției segmentului $\left[SM\right]$ pe dreapta SD;

c) $\mathrm{tg}\alpha$.

Sorin Furtună, Călărași și Stelică Pană, Chirnogi

Problema 4. Dacă $[ABCD;A_1B_1C_1D_1]$ este un paralelipiped dreptunghic, O centrul feţei $ABCD$, Q centrul feţei ADD_1A_1, α măsura unghiului dintre planele (DA_1C_1) și (DA_1B) atunci:

a) Demonstraţi că paralelipipedul dreptunghic este cub dacă şi numai dacă $QC_1\perp DA_1$ şi $OA_1\perp BD$.

b) Dacă $[ABCD;A_1B_1C_1D_1]$ este cub calculați $\sin\alpha$.

Gheorghe Fianu, Perișoru

SUCCES!

Baremul de notare este: Problema 1. a) 4 puncte; b) 3 puncte; **Problema 2. 7** puncte; **Problema 3.** a) 3 puncte; b) 2 puncte; c) 2 puncte; **Problema 4. a**) 4 puncte; b) 3 puncte.

Str. Sloboziei, nr. 28, 910001
Mun. Călărași, Jud. Călărași
Tel: +40 0242 315 949
Fax: +40 0242 312 810
www.isj.cl.edu.ro

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALA – 9 FEBRUARIE 2013

Clasa a VIII-a

Problema 1. a) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $[x+1]+\left[x+\frac{1}{2}\right]=\frac{2x+3}{2}$.

a) Ecuatia $\Leftrightarrow [2x]=\frac{2x+1}{2}$ 1p

$$\begin{cases}\frac{2x+1}{2}\le 2x<\frac{2x+3}{2}\\ \frac{2x+1}{2}=k\in Z\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\ge\frac{1}{2}\\ x<\frac{3}{2}\\ x=\frac{2k-1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\le x<\frac{3}{2}\\ x=\frac{2k-1}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}\le\frac{2k-1}{2}<\frac{3}{2}\\ k\in Z\end{cases}\Rightarrow k=1\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$ 3p

b) Fie $n\in\mathbb{N}^*$ şi $x_1,x_2,x_3,........x_n\in\{-2013;2013\}$, să se determine mulțimea numerelor naturale n pentru care este adevărată egalitatea $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+........+x_{n-1}x_n+x_nx_1=0$.

Soluție : condiție necesară $n=2p, p\in N$. 1p
p termeni din sumă sunt egali cu -2012 si p termeni sunt egali cu 2012 implică
$x_1x_2\cdot x_2x_3\cdot x_3x_4\cdot........\cdot x_{n-1}x_n\cdot x_nx_1=(-1)^p\cdot 2012^{2n}$
$\Rightarrow x_1^2\cdot x_2^2\cdot x_3^2\cdot.....\cdot x_n^2=(-1)^p\cdot 2012^{2n}>0$. Deci $p=2k,k\in N\Rightarrow n=4k\in N$. Rezulta $n\in M_4$ 2p

Problema 2. Dacă $a,\ b,\ c\in\mathbb{R},\ a\ne b$ cu proprietatea $a^2(b+c)=b^2(a+c)=2013$ atunci demonstrați că $c^2(a+b)=2013$.

Soluție

$a^2(b+c)=b^2(a+c)=2013\Rightarrow a^2(b+c)-b^2(c+a)=0$ 2p
$\Leftrightarrow a^2b+a^2c-b^2c-b^2a=0\Leftrightarrow ab(a-b)+c(a^2-b^2)=0\Leftrightarrow ab(a-b)+c(a+b)(a-b)=0$
$\Leftrightarrow (a-b)(ab+ac+bc)=0\Leftrightarrow ab+ac+bc=0$. 3p
$a(b+c)=-bc\Leftrightarrow a^2(b+c)=-abc$.
$c(a+b)=-ab\Leftrightarrow c^2(a+b)=-abc$ 2p

Problema 3. Fie $a>0$ şi piramida patrulateră regulată *SABCD* în care muchia bazei are lungimea a şi lungimea înălțimii piramidei este $2a$. Daca *M* este mijlocul laturii [*BC*] şi măsura unghiului dintre dreapta *SB* şi planul (*SAC*) este α, aflați:
a) distanța de la punctul *S* la dreapta *DM*;
b) lungimea proiecției segmentului $[SM]$ pe dreapta *SD*;
c) $\text{tg}\alpha$.

Soluție

Desen ……………………………………………………………………………………………1p

a) $DM = \frac{a\sqrt{5}}{2}$ ……………………………………………………………………1p

$ON \perp DM$ şi din aria triunghiului ΔDOM scrisă în două moduri $\Rightarrow ON = \frac{a\sqrt{5}}{10}$ ………………….……1p

Din teorema celor trei perpendiculare $\Rightarrow SN \perp DM$ şi $d(S,DM) = \frac{9a\sqrt{5}}{10}$ ………………………………1p

b) $DS = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$ şi $MT \perp SD,\ T \in (SD) \Rightarrow MT = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$ ……………………………………………………1p

$MS = \frac{a\sqrt{17}}{2}$ şi $ST = \frac{5a\sqrt{2}}{4}$ ………………………………………………………………………..1p

c) Dacă proiecția segmentului $[SB]$ pe planul (SAC) este segmentul $[OB]$ unde $\{O\} = AC \cap BD$ rezultă că $\alpha = m(\measuredangle OSB)$ ……………………………………………………………………..1p

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{OB}{SO} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Problema 4. Dacă $[ABCD;A_1B_1C_1D_1]$ este un paralelipiped dreptunghic, O centrul feţei $ABCD$, Q centrul feţei ADD_1A_1, α măsura unghiului dintre planele (DA_1C_1) și (DA_1B) atunci:

a) Demonstraţi că paralelipipedul dreptunghic este cub dacă şi numai dacă $QC_1 \perp DA_1$ şi $OA_1 \perp BD$.

b) Dacă $[ABCD;A_1B_1C_1D_1]$ este cub calculați $\sin\alpha$.

a) Fie AB = a; BC = b ; AA_1 = c;

In ΔDA_1C_1, în care $[C_1Q]$ este şi mediană şi înălţime, avem $[C_1D] \equiv [C_1A_1] \Rightarrow a^2 + c^2 = a^2 + b^2$;

$\Rightarrow b^2 = c^2$; $\Rightarrow$ b = c ; (1) ……………………………………………………………………..……2p

In ΔDA_1B, în care $[A_1O]$ este şi mediană şi înălţime, avem $[A_1D] \equiv [BA_1] \Rightarrow b^2 + c^2 = a^2 + c^2$;

$\Rightarrow b^2 = a^2$; $\Rightarrow$ b = a ; (2)…………………………………………………………………...……1p

Din (1) şi (2) avem a = b = c ……………………………………………………………………1p

b) Desen………………………………………………………………………………………1p

Dacă $[ABCD;A_1B_1C_1D_1]$, este cub,AB = a

Unghiul plan corespunzător diedrului $(DA_1C_1; DA_1B)$ este $\measuredangle(C_1QB)$

Fie $\Delta\ C_1QB$ isoscel de bază BC_1; $BC_1 = a\sqrt{2}$; $BQ = QC_1 = \frac{a\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$ (ca înălţime într-un tr.echilateral)…………………………...…………………………………………………..1p

$A(C_1QB) = \frac{BC_1 \cdot QQ'}{2} = \frac{QC_1 \cdot QB \cdot \sin BQC_1}{2}$ $\qquad \sin\alpha = \frac{a\sqrt{2}\cdot a}{\frac{a\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ……………1p