



Olimpiada de matematică  
Faza locală - 20 februarie 2015

**Clasa a XII-a**

1. Să se calculeze

(i)  $\int \frac{\arcsin x}{x^2} dx$ , pentru  $x \in (0,1)$ .

(ii)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n}{n^2+1^2} + \frac{n}{n^2+2^2} + \dots + \frac{n}{n^2+n^2} \right)$ .

2. (i) Să se determine subgrupurile grupului  $(\mathbb{Z}, +)$ .

(ii) Fie  $f: \mathbb{Z}_9 \rightarrow \mathbb{Z}_9$  definită prin  $f(x) = x^2$  pentru orice  $x \in \mathbb{Z}_9$ . Să se determine submulțimile  $A \subseteq \mathbb{Z}_9$  astfel ca  $f(A) = A$ .

**GM 2014**

3. Fie  $f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție integrabilă și  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funcția definită prin  $g(a) = \int_0^1 |x-a| \cdot f(x) dx$  pentru orice  $a \in \mathbb{R}$ .

(i) Să se arate că există  $L \geq 0$  astfel ca  $|g(a) - g(b)| \leq L \cdot |a - b|$  pentru orice  $a, b \in \mathbb{R}$ .

(ii) Dacă  $f(x) \geq 0 \quad \forall x \in [0,1]$ , să se arate că funcția  $g$  este convexă.

4. Fie  $(R, +, \cdot)$  un inel și  $Z(R) = \{a \in R : a \cdot y = y \cdot a, \forall y \in R\}$ .

(i) Să se arate că  $\forall a, b \in Z(R) \Rightarrow a - b, a \cdot b \in Z(R)$ ;

(ii) Demonstrați că dacă  $x^2 - x \in Z(R)$  pentru orice  $x \in R$ , atunci inelul  $(R, +, \cdot)$  este comutativ.

**NOTĂ**

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect este notat cu 7 puncte;
- Nu se acordă puncte din oficiu;
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore din momentul primirii subiectului.