

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
– ETAPA LOCALĂ –
08.02.2025
CLASA a XI - a

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte.
Pe foaia de concurs se trec rezolvările complete.
Timp de lucru: 3 ore

1. Fie $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ o matrice cu $\text{Tr}(A) = 2$ și $\det(A) = 3$. Demonstrați că
$$2 \det(A^2 + I_2) - \det(A^2 + 3I_2) = 4.$$
2. Fie matricele $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Să se arate că:
 - a) dacă matricea $I_n + AB$ este inversabilă, atunci matricea $I_n + BA$ este inversabilă.
 - b) dacă matricea $I_n + (AB)^p$ este inversabilă, atunci matricea $I_n + (BA)^p$ este inversabilă, pentru orice $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$.
3. a) Fie $a \in \mathbb{N}^*$. Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{a^2 n^2 + (2a-1)n + 1} \right\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x .
b) Calculați $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\pi \sqrt{n^2 + 2n + 2} \right).$
4. Fie șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ cu $x_0 = 0$ și $x_{n+1} = x_n + a + \sqrt{b^2 + 4ax_n}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, unde $a, b > 0$. Determinați $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{n^2}$.