



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală
18 februarie 2017

Clasa a XII-a

1. Fie H o parte stabilă a lui $\mathbb{N}$ în raport cu adunarea. Să se arate că dacă $6, 7 \in H$, atunci oricare ar fi $n \in \mathbb{N}, n \geq 30$, avem $n \in H$.

2. Fie $n \in \mathbb{N}^*$ și G_{2n} mulțimea matricelor $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R}), A = (a_{ij})$, cu:

$$a_{ij} = \begin{cases} x_1, & \text{dacă } j = i \\ x_2, & \text{dacă } j = 2n - i + 1, \\ 0, & \text{dacă } j \neq 2n - i + 1 \end{cases}$$

unde $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1^2 \neq x_2^2$. Demonstrați că:

- G_{2n} este grup comutativ în raport cu înmulțirea matricelor;
- grupurile $G_2, G_4, \dots$, sunt izomorfe.

3. a) Calculați $I = \int \frac{x^4 + 2x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} dx, x \in \mathbb{R}$

b) Determinați funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ cu proprietatea că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{f(x)}{x^2 + 1}$ este primitiva funcției f pentru care $g(0) = 1$.

4. Fie $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție care îndeplinește condițiile:

- f este continuă în 1;
- f este integrabilă pe $[1, 3]$;
- $f(x^3) \leq x^2 \cdot f(x)$, pentru orice $x \in (0, \infty)$.

Atunci: $\int_1^3 f(x) dx \leq 4 \cdot f(1)$.

Notă:

- Toate subiectele sunt obligatorii;
- Fiecare subiect se notează cu 7 puncte;
- Timp de lucru: 3 ore.