OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
ETAPA LOCALĂ, 24.02.2019
CLASA a X-a
SOLUŢII ŞI BAREME ORIENTATIVE

Notă: Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7 puncte. Se acordă numai punctaje întregi. Orice altă rezolvare se asimilează conform baremului.

Enunţ subiect 1, autor Gazeta Matematica.

Determinați numerele reale x și y știind că $3^x+3^y=30$ și $log_3 x - log_3 y = -1$

Detalii rezolvare	Barem asociat
Condiții de existență: $x>0, y>0$	1p
Din a doua ecuație , obținem $y=3x$	2p
Prima ecuație devine $3^x+3^{3x}=30$ cu soluția unica $x=1$	3p
Numerele cerute sunt: $x=1$, $y=3$	1p

Enunţ subiect 2, autor ***

Se consideră funcția $f:N\times N\rightarrow N$, $f((x,y))=(x+y+1)^2+x$. Să se arate că f este injectivă și nesurjectivă

Detalii rezolvare	Barem asociat
$0\notin Im_f$, deci f nu este surjectivă	1p
$f((x,y))=f((u,v)) \Leftrightarrow (x+y+1)^2+x=(u+v+1)^2+u$ (1)	1p
$u-x=(x+y+1)^2-(u+v+1)^2=(x+y-u-v)(x+y+u+v+2)$	2p
Dacă $x+y\neq u+v$, atunci alegând $x+y>u+v, avem\ x+y-u-v\geq 1\ si$ $x+y+u+v+2>u-x$	2p
Rezultă $u-x>u-x$, contradicție. Prin urmare $x+y=u+v$ și din (1) rezultă $(x,y)=(u,v)$	1p

Enunţ subiect 3, autor ***

Fie $f:C\rightarrow R$, $f(z)=\left\|z^3+1\right\|+\|z\|$. Determinați valoarea minimă a funcției și valorile lui z care realizează minimul.

Detalii rezolvare	Barem asociat
Dacă $\|z\|>1$,atunci $f(z)>1$	1p
Dacă $\|z\|\leq 1$,atunci avem $\|z^3+1\|=\|-z^3-1\|\geq \left\|\|-z^3\|-\|1\|\right\|=$ $=\left\|\|z^3\|-1\right\|=1-\|z\|^3\geq 1-\|z\|$ (1)	2p
Rezultă că minimul funcției este cel puțin 1	1p
Cazul de egalitate în (1) dă valorile lui z pentru minim ; $\|z\|=0$ sau $\|z\|=1$, minimul fiind 1.	1p

Valorile lui *z* pentru minim sunt : 0, -1, $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$	2p

Enunţ subiect 4, autor Eugen Radu

a) Demonstrați că $\sqrt{\mathbf{8+2x-x^2}}$ **+2**$(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})\sqrt{\boldsymbol{x}} > \mathbf{0}$**,**$(\forall)\boldsymbol{x} \in [\mathbf{0},\mathbf{4}]$

b) Rezolvați ecuația $\sqrt{\mathbf{8+2x-x^2}}$**+2**$(\boldsymbol{x}-\mathbf{1})\sqrt{\boldsymbol{x}}$ **=2**$\sqrt{\mathbf{4x^2-7x+6}}$

Detalii rezolvare	**Barem asociat**
a)Dacă $x \in [1,4]$, inegalitatea este evidentă Dacă $x \in [0,1]$, prin ridicare la pătrat obținem: $4x^3-7x^2+2x-8<0 \Leftrightarrow$ $(x-2)(4x^2+x+4)<0$	2p
b)Prin ridicare la pătrat obținem echivalent: $\left[\sqrt{4-x}\cdot\sqrt{2+x}+\sqrt{x}\cdot 2\cdot(x-1)\right]^2=(4-x+x)[2+x+4(x-1)^2]$, $x \in [0,4]$	1p
$\Leftrightarrow \left(2\sqrt{4-x}\cdot(x-1)-\sqrt{2+x}\cdot\sqrt{x}\right)^2=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{4-x}\cdot(x-1)=\sqrt{2+x}\cdot\sqrt{x}$	2p
Cerând $x>1$, obținem: $4x^3-23x^2+38x-16=0 \Leftrightarrow (x-2)(4x^2-15x+8)=0 \Leftrightarrow$ $x_1=2$ și $x_2=\frac{15+\sqrt{97}}{2}$	2p