

Barem de corectare OLM 2020 Clasa a IX-a

P1

Observăm că termenii sumei sunt în progresie aritmetică de rație 7.	1p
Dacă x este termenul de rang n , atunci: $x = 1 + 7(n-1)$.	1p
Egalitatea devine $\frac{1+1+7(n-1)}{2} = 7291$.	1p
Relație echivalentă cu $7n^2 - 5n - 14582 = 0$	2p
Rezultă $n_1 = 46$ și $n_2 < 0$	1p
Pentru $n = 46$ obținem $x = 1 + 7 \cdot 45 = 316$	1p

P2 – autor Traian Tămâian (GM11/2019)

a) $x_1 = \frac{1}{2^2}, x_2 = \frac{1}{6^2}, x_3 = \frac{1}{12^2}$	2p
Se demonstrează prin inducție că $x_n = \frac{1}{[n(n+1)]^2}, (\forall) n \in N^*$.	2p
b) $\sum_{k=1}^n (2k+1)x_k = \sum_{k=1}^n \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2} \right) =$	2p
$= 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1$	1p

P3 – autor Petru Vlad

Întrucât $\{a\} = a - [a]$, avem: $\left[\frac{2x+1}{6} \right] + \left[\frac{x+5}{3} \right] = \frac{2x+1}{6} + \frac{x+5}{3} - \frac{x+6}{4}$	2p
$\left[\frac{2x+1}{6} \right] + \left[\frac{2x+1}{6} + \frac{1}{2} + 1 \right] = \frac{5x+4}{12}$	1p
$\left[\frac{2x+1}{3} \right] + 1 = \frac{5x+4}{12} \Leftrightarrow \left[\frac{2x+1}{3} \right] = \frac{5x-8}{12}$	1p
$\left[\frac{2x+1}{3} \right] = k \in Z \Rightarrow x = \frac{12k+8}{5}$	1p
$\left[\frac{8k+7}{5} \right] = k \Leftrightarrow k \leq \frac{8k+7}{5} < k+1$	1p
$k \in \{-2, -1\}$, de unde $S = \left\{ -\frac{16}{5}, -\frac{4}{5} \right\}$	1p

P4 - autor Alin Pop

a) $M \in (AB$ astfel încât $AM = 3AB$, de unde $ 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MD} $	2p
Triunghiurile AMD și ACB sunt congruente (LUL), deci $MD = BC$, de unde $ \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} $.	2p
b) $ \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} $ și $ \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD} $	1p
$2 \overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AD} \geq 4 \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = 4 \overrightarrow{BD} $	1p
Rezultă $BC \geq 2BD$	1p