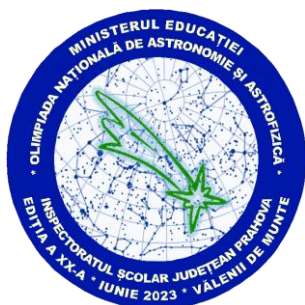




MINISTERUL EDUCAȚIEI



INSPECTORATUL ȘCOLAR
JUDEȚEAN PRAHOVA



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE ASTRONOMIE ȘI ASTROFIZICĂ

EDIȚIA A XX-A, 7 – 11 Iunie 2023, VĂLENI DE MUNTE,
PRAHOVA

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE - PROBA TEORETICĂ CATEGORIA SENIORI 2

- Se punctează oricare alte formulări/modalități de rezolvare corectă a cerințelor.
- Nu se acordă punctaje intermediare la subiectele de tip grilă.

Subiectul I (10 puncte)

1. Răspuns: C (1 punct)

2. Răspuns: D (1 punct)

$$\frac{x}{a} = e$$

Raportul dimensiunilor unghiulare coincide cu raportul distanțelor dintre Pământ și Soare. Astfel, relația următoare poate fi transformată într-o proporție:

$$\frac{\alpha_{\min}}{\alpha_{\max}} = \frac{a-x}{a+x}; \frac{\alpha_{\min} - \alpha_{\max}}{\alpha_{\max} + \alpha_{\min}} = \frac{a-x-(a+x)}{a+x+(a-x)}; \frac{x}{a} = \frac{1}{60}; a = 60x$$

3. Răspuns: A (1 punct)

4. Răspuns: C (1 punct)

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G \cdot M_{\text{Stea}}}{4\pi^2}; T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{G \cdot M_{\text{Stea}}}};$$

$$T = 6\pi R_{PS} \sqrt{\frac{2R_{PS}}{G \cdot M_{\text{Soare}}}}$$

5. Răspuns: C (1 punct)

6. Răspuns: B (1 punct)

$$\Delta m = -2,5 \lg \frac{1 - \delta}{1}$$

Unde

$$\delta = \left(\frac{R_{planetă}}{R_{stea}} \right)^2$$

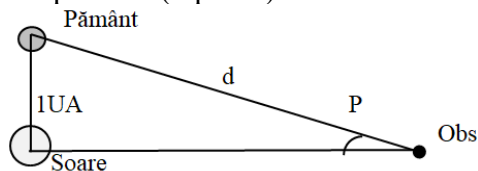
$$\frac{R_{planetă}}{R_{stea}} = \sqrt{1 - 10^{-\frac{\Delta m}{2,5}}} = \sqrt{1 - 0,9817} = 0,135$$

7. Răspuns: D (1 punct)

8. Răspuns: B (1 punct)

9. Răspuns: A (1 punct)

10. Răspuns: C (1 punct)



$$P \cong \frac{1UA}{30al} = \frac{1UA}{30 \times 63240UA} = 5,27 \times 10^{-7} rad; \frac{\alpha}{180^0} = \frac{a}{\pi}; \alpha = 180^0 \frac{5,27 \times 10^{-7}}{3,14};$$

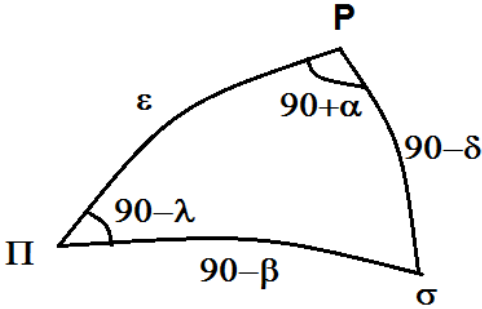
$$\alpha = (302,1019 \times 10^{-7})^0;$$

$$\alpha = (302,1019 \times 10^{-7} \times 60 \times 60)'' = 0,11''$$

Subiectul II (15 puncte)

II.1. Steaua β Gem (Pollux) (8 puncte)

Barem	Punctaj
a) Din triunghiul de poziție al astrului, se obține:	
$\cos(90 - \delta) = \cos(90 - h) \cos(90 - \varphi) + \sin(90 - h) \sin(90 - \varphi) \cos(180 - A)$	0,5p
$\sin \delta = \sin h \sin \varphi - \cos h \cos \varphi \cos A$	0,5p
$\cos A = \frac{\sin h \sin \varphi - \sin \delta}{\cos h \cos \varphi}$	0,5p
$dar, h = 0$	0,5p
$\cos A = -\frac{\sin \delta}{\sin \varphi}$	0,5p
$\cos A = -0,663$	0,5p

$A = 228^{\circ}28'36''$ măsurat față de punctul cardinal Sud sau $A = 48^{\circ}28'36''$ față de punctul cardinal Nord	1p
b)  Latitudinea ecliptică β nu se modifică Între noile coordonate ecliptice și cele ecuatoriale avem relația: $\sin \delta' = \cos \varepsilon \sin \beta + \sin \varepsilon \sin \beta \sin \lambda'$ Pentru ca răsăritul să aibă loc la punctul cardinal Vest, trebuie ca declinația steii să fie nulă: $\delta' = 0$ $\sin \lambda' = -\frac{\operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \varepsilon}$ $\sin \lambda' = -0,270$ Prima soluție este: $\lambda' = 195^{\circ}41'30''$ $\Delta \lambda = 82^{\circ}9'19''$ $\Delta t = \frac{\Delta \lambda}{360^{\circ}} T_p$ $\Delta t = 5881 \text{ ani}$ Fenomenul va fi observat în anul 7904.	0,5p 0,5p 0,5p 0,5p 0,5p 0,5p
Total	7p

II.2 Un sistem stea-exoplanetă (8 puncte)

Rezolvare	Punctaj
a) $\frac{L}{L_S} = \left(\frac{M}{M_S}\right)^{3,8}$ M-masa stelei $L = 0,0153 L_S$	0,5p 0,5p

b) $\frac{M}{M_s} = -2,5 \lg \frac{L}{L_s}$ $M = 21,91$ Steaua aflându-se la o distanță de 10 pc, va avea o magnitudine aparentă tot de 21,91. $\frac{L}{L_s} = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{4\pi R_s^2 \sigma T_s^2}$ $T = \sqrt[4]{\frac{L}{L_s} \sqrt{\frac{R_s}{R}}} T_s$ $T = 3519 \text{ K}$	0,5p 0,5p 0,5p 0,5p
c) Adâncimea tranzitului este $\delta = \left(\frac{R_{\text{planetă}}}{R_{\text{stea}}} \right)^2$ $\delta = 0,00463$	1p 1p
d) Variația magnitudinii aparente pe durata tranzitului va fi $\Delta m = -2,5 \lg \frac{1 - \delta}{1}$ $\Delta m = 0,005$ $\Delta m \cong 2,5 \lg \left(\frac{S+N}{S} \right) = 2,5 \cdot 0,434 \ln(1+N/S) \cong 1,0857 \frac{1}{S/N}$ $S/N = 217$	0,5p 0,5p 1p 1p
Total	8p

Subiectul III (25 puncte)

III.1 Lărgimea naturală a liniilor spectrale (8 puncte)

Soluție	Parțial	Punctaj
a. Cuantificarea momentului cinetic: $L = n\hbar = m_e v_n r_n$ Legea a II-a a lui Newton proiectată pe direcția radială: $\frac{m_e v_n^2}{r_n} = \frac{Z e^2}{4\pi \epsilon_0 r_n^2}$ Expresiile finale pentru viteză și rază:	0,25 p 0,50 p 0,25 p	1,50 p

$v_n = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 n\hbar} \quad \text{și} \quad r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 n^2 \hbar^2}{Ze^2 m_e}$	0,25 p	
Expresia accelerației: $a_n = \frac{v_n^2}{r_n} = \frac{Z^3 e^6 m_e}{64\pi^3 \epsilon_0^3 n^4 \hbar^4}$	0,25 p	
b. Energia cinetică a electronului este dată de: $E_{c,n} = \frac{m_e v_n^2}{2} = \frac{Z^2 e^4 m_e}{32\pi^2 \epsilon_0^2 n^2 \hbar^2}$ Expresia energiei potențiale: $E_{p,n} = \frac{-Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{16\pi^2 \epsilon_0^2 n^2 \hbar^2}$ Energia totală: $E_n = E_{p,n} + E_{c,n} = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{32\pi^2 \epsilon_0^2 n^2 \hbar^2}$ Constanta Rydberg apare în expresia lungimii de undă a fotonului emis de o tranziție atomică de pe stratul n_2 pe stratul n_1, $\frac{1}{\lambda} = Z^2 R \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$ Pe de altă parte, energia fotonului emis este egală cu diferența dintre energiile celor două niveluri, $\frac{2\pi\hbar c}{\lambda} = \frac{Z^2 e^4 m_e}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$ Prin identificare, se obține $R = \frac{e^4 m_e}{64\pi^3 \epsilon_0^2 c \hbar^3}$ Valorea numerică este $R = 1,096 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$	0,25 p 0,25 p 0,25 p 0,25 p 0,25 p 0,25 p 0,50 p 0,25 p	2,00 p
c. Admițând expresia puterii $P = \kappa a^\alpha q^\beta c^\gamma \epsilon_0^\delta$, prin analiză dimensională obținem (se folosesc unitățile de măsură în SI în locul dimensiunilor, pentru claritate): $[P] = W = J s^{-1} = kg \text{ m}^2 s^{-3}$		

$[a] = m s^{-2}, \quad [q] = C, \quad [\varepsilon_0] = C^2 s^2 kg^{-1} m^{-3}, \quad [c] = m s^{-1}$ Așadar, se obține sistemul de ecuații $\begin{cases} \delta = -1 \\ \alpha + \gamma - 3\delta = 2 \\ -2\alpha - \gamma + 2\delta = -3 \\ \beta + 2\delta = 0 \end{cases}$ al cărui unică soluție este $\alpha = \beta = 2, \quad \gamma = -3, \quad \delta = -1$. Așadar, $P = \frac{q^2 a^2}{6\pi c^3 \varepsilon_0}$	5 x 0,05 p 0,25 p	0,50 p
d. Dacă pierderea de energie s-ar datora radiației Larmor, timpul de viață al stării excitate ar fi $\tau = (E_{n_2} - E_{n_1})/P$. Folosind subpunctele anterioare și înlocuind mărimile deja determinate, obținem $\tau = \frac{768 \pi^5 \varepsilon_0^5 c^3 \hbar^6}{m_e Z^4 e^{10}} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) n_2^8$ sau, alternativ $\tau = \frac{3\varepsilon_0 c m_e}{16\pi e^2 Z^4 R^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) n_2^8$ În cazul tranziției Ly-α a hidrogenului atomic, $n_2 = 2, n_1 = 1$ iar $\tau_{Ly-\alpha} = \frac{36\varepsilon_0 c m_e}{\pi e^2 R^2}$ Valoarea numerică este $\tau_{Ly-\alpha} \approx 9,0 \cdot 10^{-9} s$ Se observă că timpul de tranziție mediu este de ordinul nanosecundelor, estimare care nu este departe de rezultatul precis, dedus prin calcule bazate pe mecanică cuantică.	0,50 p 0,50 p 0,50 p	1,50 p
e. Conform principiului incertitudinii al lui Planck, $\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$ Incetitudinea timpului de viață este de ordinul timpului de viață însuși. Așadar, $\Delta t \sim \tau$ iar	0,25 p	

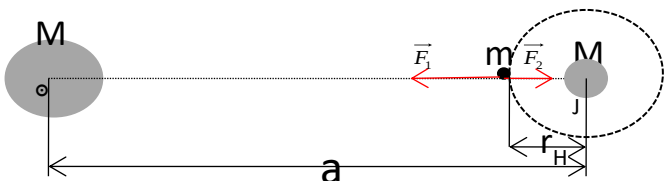
$\Delta E \approx \frac{\hbar}{\tau} = \frac{m_e Z^4 e^{10}}{768 \pi^5 \epsilon_0^5 c^3 \hbar^5 n_2^8} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)^{-1}$ sau, alternativ $\Delta E \approx \frac{\hbar}{\tau} = \frac{16 \pi e^2 Z^4 R^2 \hbar}{3 \epsilon_0 c m_e n_2^8} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)^{-1}$ Pentru incertitudinea lungimii de undă, se va ține cont că $\Delta E = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda_0 + \Delta\lambda} \approx \frac{\hbar}{\tau}$ Presupunând că $\Delta\lambda \ll \lambda_0$ și folosind $\Delta(x^{-1}) \approx \frac{\Delta x}{x^2}$, se obține $\Delta\lambda \approx \frac{\lambda_0^2}{2\pi c \tau}$ <i>Notă: se acordă punctaj maxim indiferent dacă în rezultatul final se înlocuiește sau nu expresia duratei de viață a stării excitate.</i>	0,25 p 0,25 p 0,25 p	1,00 p
f. Când presiunea gazului este ridicată, concentrația particulelor de gaz este de asemenea ridicată, iar drumul liber mediu scade. Așadar, se produc mai multe ciocniri între particulele de gaz pe unitatea de timp, ceea ce cauzează o scădere a timpului mediu de viață al stărilor excitate. Așadar, cu cât presiunea gazului este mai mare, liniile spectrale se lărgesc. Accelerația gravitațională la suprafața unei pitice albe este mai mare decât la suprafața unei gigante roșii, întrucât $g \propto M/R^2$, iar stelele pitice sunt mult mai dense și au o rază mult mai mică decât gigantele. Gradientul de presiune este proporțional cu ρg, ambii factori fiind mai mari în cazul piticei albe. Așadar, o stea pitică albă va produce un spectru cu linii semnificativ mai largi decât o giganta roșie. Acest lucru se datorează presiunii mult mai ridicate a gazelor de la suprafața piticei albe (<i>ultima afirmație necesită justificare pentru obținerea punctajului maxim</i>).	0,75 p 0,25 p 0,50 p	1,50 p

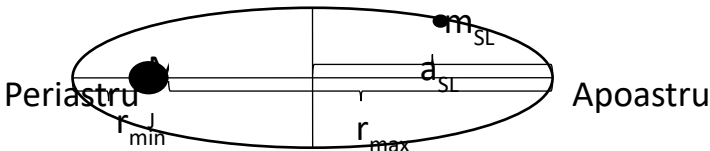
III.2. Corp Negru (8 puncte)

[illegible]

Soluție alternativă, folosind derivate : $B_{\lambda}(T)d\lambda = -B_{\nu}(T)d\nu$ dar, $\nu = \frac{c}{\lambda}$ $d\nu = -\frac{c}{\lambda^2}d\lambda$ $B_{\lambda}(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$	0,5p 0,5p 1p
B. d) $m_{\lambda_1} - m_{\lambda_2} = -2,5lg \frac{B_{\lambda_1}}{B_{\lambda_2}} + const.$ (constanta de calibrare a punctului de zero) $= -2,5lg \frac{\lambda_2^5}{\lambda_1^5} \frac{e^{\frac{hc}{\lambda_2 kT}} - 1}{e^{\frac{hc}{\lambda_1 kT}} - 1} + const.$ $m_{\lambda_1} - m_{\lambda_2} \cong -2,5 \cdot 5 \cdot lg \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right) - 2,5 \frac{hc}{kT} \left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right) \frac{1}{\ln 10} + const. (1)$ Pentru steaua de referință de clasă A0, temperatura de culoare 15000 K, și indice de culoare 0 se află din (1) valoare constantei const.= 1,501 Tot din (1) se obține $B - V = -0,47 + \frac{7000}{T_C}$ de unde $T_C = \frac{7000 K}{(B-V)+0,47}$	0,5p 0,5p 1p 0,5p 0,5p
Total	8p

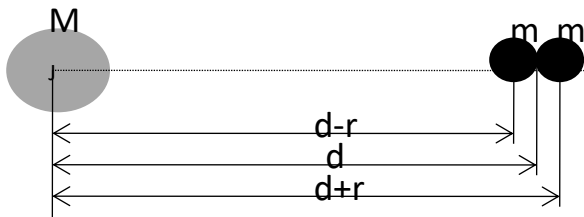
III.3 Cometa Shoemaker-Levy 9 (9 puncte)

Barem evaluare	Punctaj
a) Sfera Hill a planetei Jupiter este regiunea din vecinătatea acesteia, în care domină atracția gravitațională exercitată de aceasta. Fie un corp de masă $m \ll M_J$ care se rotește în jurul lui Jupiter la o distanță egală cu raza sferei Hill, r_H. Considerăm cele trei corpuri aliniate.  Diferența între cele două forțe (F_1 este forța cu care Soarele atrage corpul m, iar F_2 este forța cu care Jupiter îl atrage pe m) este forța centripetă ce determină mișcarea acestuia în jurul Soarelui. Considerăm, inițial, că mișcarea este circulară, distanța între Jupiter și Soare fiind a.	0,25p

$k \frac{M_{\odot} m}{(a - r_H)^2} - k \frac{M_J m}{(r_H)^2} = m \omega^2 (a - r_H)$	0,5p
Din legea a treia a lui Kepler: $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{k M_{\odot}}$ $\omega = \frac{2\pi}{T}$	0,5p
$\frac{M_{\odot} m}{a^2 \left(1 - \frac{r_H}{a}\right)^2} - \frac{M_J m}{(r_H)^2} = \frac{m M_{\odot}}{a^3} (a - r_H)$	0,25p
Folosind aproximația binomială, obținem: $\frac{1}{\left(1 - \frac{r_H}{a}\right)^2} = \left(1 - \frac{r_H}{a}\right)^{-2} \cong 1 + 2 \frac{r_H}{a}$	0,25p
Prin înlocuire, vom avea: $r_H = a \sqrt[3]{\frac{M_J}{3M_{\odot}}}$ Dacă luăm în considerare faptul că orbita lui Jupiter nu este circulară, ci eliptică, obținem expresia generală: $r_H = a_J (1 - e_J) \sqrt[3]{\frac{M_J}{3M_{\odot}}}$ $r_H = 5,054 \cdot 10^{10} m$	0,25p 0,25p
Aplicăm legea a treia a lui Kepler pentru sistemul Jupiter-cometă: $\frac{T_{SL}^2}{a_{SL}^3} = \frac{4\pi^2}{k(M_J + m_{SL})} \cong \frac{4\pi^2}{kM_J}$ 	0,5p
$a_{SL} = \sqrt[3]{\frac{k M_J T_{SL}^2}{4\pi^2}}$ $a_{SL} = 2,337 \cdot 10^{10} m$ $r_{max} = (1 + e_{SL}) a_{SL} = 4,67 \cdot 10^{10} m$ Deoarece $r_{max} < r_H$, rezultă că Shoemaker-Levy 9 se află sub influența gravitațională a lui Jupiter.	0,25p 0,25p 0,25p

b) Cometa se va dezintegra inevitabil, dacă periastrul său se află în interiorul limitei Roche a lui Jupiter. Vom determina această limită Roche, considerând două corpuri solide identice de masă m și rază r alipite, situate la distanța d față de Jupiter.

0,25p



Forțele de atracție gravitațională între Jupiter și corpuri, respectiv între corpuri sunt:

$$F_{J1} = k \frac{M_J m}{(d-r)^2}$$

0,25p

$$F_{J2} = k \frac{M_J m}{(d+r)^2}$$

0,25p

$$F_{12} = k \frac{m^2}{(2r)^2}$$

0,25p

Folosim aproximația binomială:

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{r}{d}\right)^2} = \left(1 - \frac{r}{d}\right)^{-2} \cong 1 + 2 \frac{r}{d}$$

0,25p

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{r}{d}\right)^2} = \left(1 + \frac{r}{d}\right)^{-2} \cong 1 - 2 \frac{r}{d}$$

Dacă $F_{J1} > F_{12}$, atunci corpul “1” se desprinde.

Definim diferența:

$$\Delta F = F_{J1} - F_{J2} = 4k \frac{M_J m}{d^2} \frac{r}{d}$$

0,25p

Dacă $\Delta F = F_{12}$, atunci obținem limita Roche:

0,25p

$$4k \frac{M_J m}{d_R^2} \frac{r}{d_R} = k \frac{m^2}{(2r)^2}$$

$$d_R = r \sqrt[3]{16} \left(\frac{M_J}{m}\right)^{\frac{1}{3}}$$

0,25p

$$\rho_J = \frac{M_J}{V_J} = \frac{3M_J}{4\pi R_J^3}$$

$$\bar{\rho} = \frac{m}{V} = \frac{3m}{4\pi r^3}$$

$$d_R = 2,52 R_J \left(\frac{\rho_J}{\bar{\rho}}\right)^{\frac{1}{3}}$$

0,25p

0,25p

$$d_R = 24,39 \cdot 10^7 m$$

$$r_{min} = r_{Periastru} = (1 - e_{SL}) a_{SL} = 2 \cdot 10^7 m$$

0,25p

0,25p

Deoarece $r_{min} < d_R$, rezultă că o parte din traiectoria cometei Shoemaker-Levy 9 se află în interiorul limitei Roche și, sub acțiunea forțelor mareice foarte puternice ale lui Jupiter, fragmentarea acesteia este inevitabilă.	
c) i) Lumina emisă din punctul A va fi deplasată spre albastru (blue shift), iar cea emisă din B va fi deplasată spre roșu (red shift). $v_A = v_B = v = 2\pi \frac{R_J}{T_J} = 12.408 \text{ m/s}$ În limita nerelativistă a efectului Doppler, deplasarea spectrală relativă are expresia: $z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{c}$ deci deplasarea spectrală va fi: $\Delta\lambda = \lambda_0 \frac{v}{c} = 2,56 \cdot 10^{-2} \text{ nm}$ Deplasarea spectral totală va fi: $2\Delta\lambda = 5,12 \cdot 10^{-2} \text{ nm}$	0,25p 0,25p 0,25p 0,25p
c) ii) Temperatura medie a straturilor superioare ale atmosferei lui Jupiter este: $\theta_J = 163K$. Determinăm viteza termică a unei molecule de metan cu expresia: $v_T = \sqrt{\frac{3R\theta_J}{\mu}}$ unde $\mu = 16 \text{ g/mol}$ este masa molară a metanului. $v_T = 503,9 \text{ m/s} \cong 504 \text{ m/s}$ Viteza de evadare are expresia: $v_{II} = \sqrt{\frac{2kM_J}{R_J}}$ $v_{II} = 6 \cdot 10^4 \text{ m/s}$ Deoarece raportul: $\frac{v_T}{v_{II}} = 0,0084 < 0,1$ rezultă că metanul va fi reținut în atmosfera lui Jupiter pentru o perioadă nedefinită.	0,25p 0,25p 0,25p
Total	9p