



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală - 14.02.2015

BAREM DE CORECTARE - Clasa a X – a

PROBLEMA 1.

- (2p) Înlocuim în relația dată pe x , cu $2015 \cdot x$
- (2p) și obținem $f(x) \leq 1 + \log_{2015} x$
- (2p) Dar $f(x) \geq 1 + \log_{2015} x$
- (1p) Așadar, $f(x) = 1 + \log_{2015} x$

PROBLEMA 2.

- (2p) a) De exemplu, fie $a = \sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ și $b = \log_{\sqrt{2}} 3 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$
- (1p) Se verifică $a^b = 3 \in \mathbb{N}$
- (1p) b) După pasul 1 se obțin numerele 1925, 693, 2475, 1575.
- (2p) Dacă după pasul k , pe tablă sunt scrise numerele a, b, c și d , atunci la pasul $k + 1$ numerele devin $\sqrt[3]{bcd}, \sqrt[3]{acd}, \sqrt[3]{abd}, \sqrt[3]{abc}$. Se observă că $\sqrt[3]{bcd} \cdot \sqrt[3]{acd} \cdot \sqrt[3]{abd} \cdot \sqrt[3]{abc} = abcd$, adică după fiecare pas, produsul numerelor de pe tablă este același.
- (1p) Produsul numerelor inițiale se termină în 5, iar produsul numerelor 847, 567, 297 și 8019 se termină în 7. În concluzie, nu este posibil ca după un număr finit de pași, să fie scrise pe tablă aceste numere.

PROBLEMA 3.

- (1p) Din $z^2 - z + 5 = 0$ avem $(z - 1)^2 = -(z + 4)$
- (3p) Dacă există un număr $n \in \mathbb{Z}$, astfel încât $a = 4n$ și $b = 2n$, atunci
 $(z - 1)^2 = -(z + 4) \Rightarrow ((z - 1)^2)^{2n} = (-(z + 4))^{2n} \Rightarrow (z - 1)^a = (z + 4)^b = 0$
- (3p) Dacă $(z - 1)^a = (z + 4)^b$, atunci
 $(z - 1)^2 = -(z + 4) \Rightarrow (z - 1)^{2b} = (-1)^b \cdot (z + 4)^b \Rightarrow (z - 1)^{2b} = (-1)^b \cdot (z - 1)^a$
de unde, $a = 4n$ și $b = 2n$ pentru un număr $n \in \mathbb{Z}$.

PROBLEMA 4.

(1p) Avem $|a + b|^2 = (a + b)(\bar{a} + \bar{b}) = 2 + a\bar{b} + \bar{a}b$

(1p) și $AB^2 = |b - a|^2 = (b - a)(\bar{b} - \bar{a}) = 2 - (a\bar{b} + \bar{a}b)$

(1p) de unde, $|a + b|^2 = 4 - AB^2$

 Analog, $|b + c|^2 = 4 - BC^2$ și $|c + a|^2 = 4 - AC^2$

(1p) Relația dată devine: $4 - AB^2 + 4 - BC^2 + 4 - AC^2 = 4 \Leftrightarrow AB^2 + BC^2 + AC^2 = 8$

(1p) Din teorema sinusurilor rezultă că $\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C = 2$

(2p) sau echivalent, $1 + \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C = 0 \Leftrightarrow \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C = 0$,

 adică triunghiul $\triangle ABC$ este dreptunghic.

¹Fiecare corector acordă un număr întreg de puncte;

²Orice altă rezolvare corectă se punctează corespunzător.