

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**Etapa locală, 22 februarie 2020****Subiect clasa a VII-a****PROBLEMA 1**

Se consideră numerele $a = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{3} + \sqrt{27}}{\sqrt{2}}$ și $b = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{3} - \sqrt{27}}{\sqrt{2}}$. Arătați că numerele

$A = a \cdot b$ și $B = \frac{1}{1+a+a^2} + \frac{1}{1+b+b^2} + \frac{1}{1+a+b}$ sunt naturale.

PROBLEMA 2

(4p) a) Să se rezolve în $\mathbb{Q}$ ecuația: $\frac{x+2}{1} + \frac{x+3}{2} + \frac{x+4}{3} + \dots + \frac{x+2021}{2020} = 2020$.

(3p) b) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x^2 = a$, unde $a = \sqrt{18-8\sqrt{2}} + \sqrt{18+8\sqrt{2}}$.

PROBLEMA 3

Fie $\triangle ABC$ dreptunghic ($\angle A = 90^\circ$), (BE bisectoare, E pe latura AC). Paralela dusă la AB prin E intersectează pe BC în D , iar paralela prin E la BC intersectează pe AB în H . Dacă $DH \cap AC = \{F\}$ demonstrați că:

(3p) a) $BDEH$ este romb;

(4p) b) $\angle FBC = 90^\circ$.

PROBLEMA 4

Un trapez de perimetru $4a$ este circumscris unui cerc. Determinați, în funcție de a , lungimea liniei mijlocii a trapezului.

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Timp de lucru 3 ore. Punctajul maxim acordat fiecărei probleme este de 7 puncte.

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală, 22 februarie 2020

Barem de corectare clasa a V-a

PROBLEMA 1

Se consideră numerele $a = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{18} + \sqrt{3} + \sqrt{27}}{\sqrt{2}}$ și $b = \frac{\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{3} - \sqrt{27}}{\sqrt{2}}$. Arătați că numerele

$A = a \cdot b$ și $B = \frac{1}{1+a+a^2} + \frac{1}{1+b+b^2} + \frac{1}{1+a+b}$ sunt naturale.

Soluție:

$$a = \frac{5\sqrt{2} + 4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, b = \frac{5\sqrt{2} - 4\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$A = a \cdot b = \frac{(5\sqrt{2} + 4\sqrt{3})(5\sqrt{2} - 4\sqrt{3})}{\sqrt{2}} = 1 \in \mathbb{N} \quad \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

Se observă că $a \cdot b = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{a} \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$$B = \frac{1}{1+a+a^2} + \frac{1}{1+\frac{1}{a}+\left(\frac{1}{a}\right)^2} + \frac{1}{1+a+\frac{1}{a}} = \dots\dots\dots 2 \text{ puncte}$$

$$= \frac{1}{1+a+a^2} + \frac{a^2}{1+a+a^2} + \frac{a}{1+a+a^2} = \frac{1+a+a^2}{1+a+a^2} = 1 \in \mathbb{N}$$

(selectată de prof. Ilonța Andrei, Colegiul Național „Silvania” Zalău din Supliment G.M.B. nr.5/2019)

PROBLEMA 2

(4p) a) Să se rezolve în $\mathbb{Q}$ ecuația : $\frac{x+2}{1} + \frac{x+3}{2} + \frac{x+4}{3} + \dots + \frac{x+2021}{2020} = 2020$.

(3p) b) Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x^2 = a$, unde $a = \sqrt{18-8\sqrt{2}} + \sqrt{18+8\sqrt{2}}$.

Soluție:

a) Scădem din ambii membri ai ecuației pe 2020. Membru stâng este o sumă de 2020 fracții, din fiecare fracție îl scădem pe 1 :

$$\left(\frac{x+2}{1} - 1\right) + \left(\frac{x+3}{2} - 1\right) + \left(\frac{x+4}{3} - 1\right) + \dots + \left(\frac{x+2021}{2020} - 1\right) = 0 \quad \dots\dots 2 \text{ puncte}$$

După efectuarea scăderilor din paranteze și scoaterea factorului comun obținem relația:

$$(x+1)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2020}\right)=0 \quad \dots\dots\dots 1 \text{ puncte}$$

Un produs este nul dacă cel puțin unul dintre factori este 0, a doua paranteză este diferită de zero, deci obținem ecuația $x+1=0$ care are soluția rațională, $x=-1$ 1 puncte

(autor prof. Chiș Maria, Școala Gimnazială „Corneliu Coposu” Zalău, prelucrare)

b) $a = \sqrt{18-8\sqrt{2}} + \sqrt{18+8\sqrt{2}} = \sqrt{(4-\sqrt{2})^2} + \sqrt{(4+\sqrt{2})^2} \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

$$= |4-\sqrt{2}| + |4+\sqrt{2}| = 4-\sqrt{2} + 4+\sqrt{2} = 8 \quad \dots\dots 1 \text{ punct}$$

(sau folosind formula radicalilor compuși

$$\sqrt{18 \pm 8\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18 + \sqrt{18^2 - 128}}{2}} \pm \sqrt{\frac{18 + \sqrt{18^2 - 128}}{2}} = 4 \pm \sqrt{2} \Rightarrow a = 8 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ puncte)}$$

Deci, $x^2 = 8 \Rightarrow x = \pm 2\sqrt{2} \quad \dots\dots\dots 1 \text{ punct}$

(problemă propusă de Școala Gimnazială „Lucian Blaga” Jibou)

PROBLEMA 3

Fie $\triangle ABC$ dreptunghic ($\angle A = 90^\circ$), (BE bisectoare, E pe latura AC . Paralela dusă la AB prin E intersectează pe BC în D , iar paralela prin E la BC intersectează pe AB în H . Dacă $DH \cap AC = \{F\}$ demonstrați că:

(3p) a) $BDEH$ este romb;

(4p) b) $\angle FBC = 90^\circ$.

Soluție:

a) $\angle EBH = \angle BED$ (alt. int.) și $\angle DBE = \angle BEH$ (alt. int.) 1 punct

$\angle EBH = \angle EBD$ (BE bisectoare), deci în patrulaterul $EHBD$ o diagonală este și bisectoarea unghiurilor, de unde rezultă că $EHBD$ romb 2 puncte

b) $EHBD$ romb și fie $DH \cap EB = \{M\}$. Avem $DH \perp EB$ și $EM = MB$, rezultă că $\triangle FBE$ isoscel, de unde obținem $FE = FB$ și, implicit, $\angle FEB = \angle FBE$ 2 puncte

Ca urmare, $\angle FBC = \angle FBE + \angle EBC = \angle FEB + \angle BED = 90^\circ$ 2 puncte

(selectată de prof. Chiș Floare, Școala Gimnazială Nr. 1 Bănișor din "Matematica în concursurile școlare)

PROBLEMA 4

Un trapez de perimetru $4a$ este circumscris unui cerc. Determinați, în funcție de a , lungimea liniei mijlocii a trapezului.

Soluție:

Figura corectă 1 punct

Fie trapezul ABCD, cu $AB \parallel CD$ circumscris cercului. Notăm punctele de tangență cu $M \in [AB]$, $N \in [BC]$, $P \in [CD]$, respectiv $Q \in [DA]$. Folosind proprietatea tangentei dintr-un punct exterior la cerc rezultă că $AM = AQ = x$, $BM = BN = y$, $CN = CP = z$ și $DP = DQ = t$ 1 punct

Atunci $AB + CD = (x + y) + (z + t)$ și $AD + BC = (x + t) + (y + z)$ 1 punct

deci $AB + CD = AD + BC$ 1 punct

Din relația obținută anterior și $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 4a$ 1 punct

rezultă $AB + CD = 2a$ 1 punct

Atunci, linia mijlocie a trapezului va fi egală cu $(AB + CD)/2 = 2a/2 = a$ 1 punct

(selectată de prof. Radu Floare, Școala Gimnazială „Sylvania” Șimleu Silvaniei)