

1.

$\det A = \begin{vmatrix} 1 & a & \frac{4S^2}{ab} \\ 1 & b & \frac{4S^2}{bc} \\ 1 & c & \frac{4S^2}{ca} \end{vmatrix} = \frac{4S^2}{abc} \cdot \begin{vmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & a \\ 1 & c & b \end{vmatrix}$	(3p)
$\begin{vmatrix} 1 & a & c \\ 1 & b & a \\ 1 & c & b \end{vmatrix} = \sum a^2 - \sum ab \geq 0$	(3p)
$\det A = 0 \Leftrightarrow a = b = c$	(1p)

2.

Folosim egalitatea $\det(A - x \cdot I_2) = x^2 - (trA) \cdot x + \det A$ și deducem imediat: $\det A - trA = 1$, $\det A + trA = 3$	(4p)
$\det A = 2, trA = 1$, de unde $\det(A - 2I_2) = 4$.	(3p)

3.

a) Se arată, prin inducție matematică, că $x_n > 0, \forall n \geq 0$. Atunci, $x_{n+1} - x_n = \frac{4}{x_n} > 0 \Rightarrow$ șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ este strict crescător. Dacă șirul $(x_n)_{n \geq 0}$ ar fi mărginit superior, deci convergent, trecând la limită, ar rezulta: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \frac{4}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}$, contradicție. Urmează $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$	(4p)
b) Aplicând criteriul Stolz –Cesaro, avem: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_{n+1}^2 - x_n^2) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(8 + \frac{16}{x_n^2} \right) = 8$, deci $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{2}$.	(3p)

4.	a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{x^2} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos 3x}{x^2} \right) = 1 + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{3x}{2}}{x^2} = \frac{11}{2}$	3p
	b) $a_k = e^{-k}$	2p
	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{e-1}$	2p