

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

Etapa locală – Constanța, 11.02.2023

Clasa a IX-a

SUBIECTUL 1

a) Arătați că $\left[\frac{[x]}{n} \right] = \left[\frac{x}{n} \right]$, pentru orice număr real x și orice număr natural nenul n .

b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația:

$$\left[\frac{[x + 2023]}{3} \right] + \left[\frac{[x + 2024]}{3} \right] + \left[\frac{[x + 2025]}{3} \right] = 2023x$$

S-a notat cu $[a]$, partea întreagă a numărului real a .

* * *

SUBIECTUL 2

Se consideră o mulțime $G \subset \mathbb{R}$ care satisface simultan proprietățile:

i) $1 \in G$; ii) dacă $x \in G$, atunci $\sqrt{x+2} \in G$; iii) dacă $\sqrt{x+3} \in G$, atunci $x+4 \in G$.

Arătați că $\sqrt{2021} \in G$.

Supliment Gazeta Matematică nr.12/2022

SUBIECTUL 3

Fie $x, y, z \in (0, \infty)$, cu proprietatea $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.

Demonstrați inegalitatea: $\frac{1}{\sqrt{x^2 + yz + 3}} + \frac{1}{\sqrt{y^2 + zx + 3}} + \frac{1}{\sqrt{z^2 + xy + 3}} \geq 1$.

* * *

SUBIECTUL 4

Fie $ABCDE$ un pentagon înscris într-un cerc cu centrul în O iar punctele M și N pe laturile BC , respectiv DE , astfel încât $\frac{BM}{MC} = \frac{EN}{ND} = 2$. Considerăm H_1, H_2, H_3 ortocentrele triunghiurilor ABC, ACD

respectiv ADE . Să se arate că dacă O este centrul de greutate al triunghiului $H_1H_2H_3$, atunci dreapta AO trece prin mijlocul segmentului MN .

Cătălin Zîrnă

Notă:

Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.