



OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ
Etapa locală
15 februarie 2015

Clasa a X-a

1. Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuațiile:

a) $\frac{1}{2^{2x+1} - 3 \cdot 2^{x+1} + 6} - \frac{1}{2^{2x} - 2^{x+2} + 3} = \frac{3}{2^x}$;

b) $\sqrt[3]{2x+1} + \sqrt[3]{4x+5} + \sqrt[3]{5x-3} = \sqrt[3]{11x+3}$.

2. Fie $a, b, c > 1$, astfel încât $abc = 8$. Demonstrați că

$$\log_{ab} a + b + \log_{bc} b + c + \log_{ca} c + a \geq 3.$$

3. Fie $A_1 A_2 \dots A_n$ un poligon regulat, înscris în cercul $\mathcal{C}(O, R)$ și $M \in \mathcal{C}(O, R)$. Arătați:

$$nR \leq MA_1 + MA_2 + \dots + MA_n \leq 2nR.$$

4. a) Fie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o funcție cu proprietatea:

$$f(f(x)) + 2014 \cdot f(x) = x^{2015}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Demonstrați că f este injectivă.

b) Există funcții $f: (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, injective, astfel încât

$$f(x) + f(2^x) + f(\log_2 x) = 2015, \quad \forall x \in (1, \infty) ?$$

Notă

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect va fi notat cu puncte între 1 și 10 (1 punct din oficiu).

Timp de lucru: 3 ore