

BAREM DE CORECTARE

ETAPA LOCALĂ - 21.02.2016

CLASA A IX-A

Subiectul I (7p)

Fie n un număr natural compus și $1 = d_1 < d_2 < \dots < d_k = n$ divizorii săi naturali, $k \geq 3$. Să se arate că $d_1, d_2, \dots, d_k$ nu sunt în progresie aritmetică.

Gazeta Matematică

Presupunem că $d_1, d_2, \dots, d_k$ sunt în progresie aritmetică. Pentru $k \geq 4$ avem $d_1 + d_k = d_2 + d_{k-1} = 1 + n$, deci $d_{k-1} = n - (d_2 - 1)$ 2p

Cum d_{k-1}/n , rezultă că $d_{k-1}/(d_2 - 1)$, fals, deoarece $0 < d_2 - 1 < d_{k-1}$ 2p

Pentru $k = 3$, rezultă că $n = p^2$, unde p este număr prim.....1p

Cum $d_2 = p$ și $d_3 = p^2$, atunci $p^2 + 1 = 2p$, deci $p = 1$, fals.....2p

Subiectul II (7p)

(2p) a) Determinați $[\sqrt{4n^2 - 2n}]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

(5p) b) Arătați că $\left\lfloor \frac{n}{\sum_{k=1}^n \{\sqrt{4k^2 - 2k}\}} \right\rfloor = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

($[x]$ reprezintă partea întreagă a lui x și $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x).

a) Avem $4n^2 - 4n + 1 < 4n^2 - 2n < 4n^2, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Deci $(2n - 1) < \sqrt{4n^2 - 2n} < 2n \Rightarrow [\sqrt{4n^2 - 2n}] = 2n - 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 2p

b) Trebuie demonstrat că $2 \leq \frac{n}{\sum_{k=1}^n \{\sqrt{4k^2 - 2k}\}} < 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$, ceea ce este echivalent cu

$\frac{n}{3} < \sum_{k=1}^n (\sqrt{4k^2 - 2k} - (2k - 1)) \leq \frac{n}{2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ 2p

$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{3} + 2k - 1\right) < \sum_{k=1}^n \sqrt{4k^2 - 2k} \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2} + 2k - 1\right)$ 1p

Este suficient să arătăm că $\frac{6k-2}{3} < \sqrt{4k^2 - 2k} \leq \frac{4k-1}{2}, \forall k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow \frac{36k^2 - 24k + 4}{9} < 4k^2 - 2k \leq \frac{16k^2 - 8k + 1}{4}, \forall k \in \mathbb{N}^* \Leftrightarrow -24k + 16 < 0 \leq 9, \forall k \in \mathbb{N}^*, \text{ adevărat} \dots\dots\dots 2p$

Subiectul III (7p)

Dacă $x, y, z \in (0, \infty)$, demonstrați că:

$$\frac{xy}{xy+x+y} + \frac{yz}{yz+y+z} + \frac{zx}{zx+z+x} \leq \frac{6+x^2+y^2+z^2}{9}.$$

$$\frac{xy}{xy+x+y} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}} \leq \frac{1+x+y}{9}, \quad x, y \in (0, \infty) \quad \dots\dots\dots 3p$$

$$\sum \frac{xy}{xy+x+y} \leq \frac{3+2(x+y+z)}{9}, \quad x, y, z \in (0, \infty) \quad \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Cum } 2x \leq x^2 + 1, \quad 2y \leq y^2 + 1, \quad 2z \leq z^2 + 1$$

$$\text{Avem } \sum \frac{xy}{xy+x+y} \leq \frac{6+x^2+y^2+z^2}{9} \quad \dots\dots\dots 3p$$

Subiectul IV (7p)

În triunghiul ABC se consideră M mijlocul lui $[BC]$ și $G \in (AM)$ astfel încât $\frac{AG}{AM} = k$.

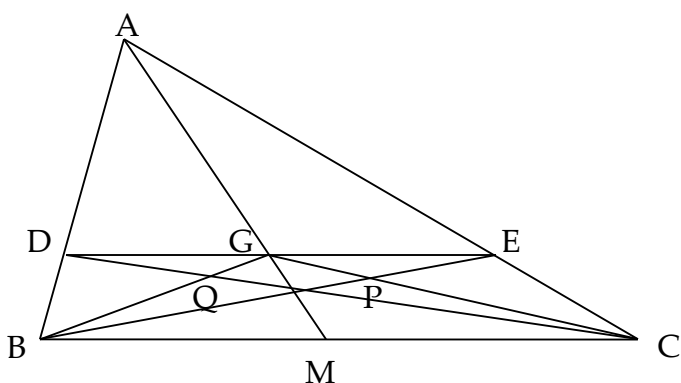
Paralela prin G la BC intersectează AB în D și AC în E . Fie $BG \cap CD = \{Q\}$ și $CG \cap BE = \{P\}$.

(2p) a) Arătați că $\frac{GQ}{QB} = \frac{k}{2}$;

(3p) b) Exprimați vectorul $\overrightarrow{GQ}$ în funcție de vectorii $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ și scalarul k ;

(2p) c) Demonstrați că, dacă G este centrul de greutate al triunghiului ABC , atunci

$$\Delta MPQ \sim \Delta ABC.$$



$$a) DG \parallel BC \Rightarrow \Delta DQG \sim \Delta CQB \Rightarrow \frac{GQ}{QB} = \frac{DG}{BC} \Rightarrow \frac{GQ}{QB} = \frac{DG}{2BM}$$

$$\text{Cum } \Delta ADG \sim \Delta ABM, \text{ avem } \frac{DG}{BM} = \frac{AG}{AM} = k$$

$$\text{Deci } \frac{GQ}{QB} = \frac{k}{2} \dots\dots\dots 2p$$

$$b) \frac{AG}{AM} = k \neq 1 \Rightarrow \frac{GA}{GM} = \frac{k}{1-k}$$

$$\frac{GQ}{QB} = \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{BQ}{BG} = \frac{2}{k+2} \Rightarrow \overrightarrow{BQ} = \frac{2}{k+2} \overrightarrow{BG} = \frac{2}{k+2} \left(\frac{\overrightarrow{BA} + \frac{k}{1-k} \overrightarrow{BM}}{1 + \frac{k}{1-k}} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BQ} = \frac{1}{k+2} \left((k-2) \overrightarrow{AB} + k \overrightarrow{AC} \right) \dots\dots\dots 2p$$

$$\text{Dar } \overrightarrow{GQ} = -\frac{k}{2} \overrightarrow{BQ}, \text{ deci } \overrightarrow{GQ} = -\frac{k}{2(k+2)} \left((k-2) \overrightarrow{AB} + k \overrightarrow{AC} \right) \dots\dots\dots 1p$$

$$c) G \text{ centrul de greutate al } \Delta ABC \Rightarrow k = \frac{2}{3}$$

$$\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BQ} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{AC} \Rightarrow MQ \parallel AC (1)$$

$$\text{Analog } \overrightarrow{MP} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{AB} \Rightarrow MP \parallel AB (2) \dots\dots\dots 1p$$

$$\text{Se arată că } \frac{GP}{PC} = \frac{k}{2} \Rightarrow \frac{GP}{PC} = \frac{GQ}{QB} \Rightarrow PQ \parallel BC (3)$$

$$\text{Din (1), (2), (3)} \Rightarrow \Delta MPQ \sim \Delta ABC \dots\dots\dots 1p$$