

BAREM DE CORECTARE
OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
 ETAPA LOCALĂ - 19 februarie 2017

Clasa a XI - a

SUBIECTUL I (7p)

Fie șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ definit prin $a_1 > 0$ și $a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + na_n^2}$, $n \geq 1$.

a) Să se arate că șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și să se calculeze limita sa.

b) Dacă $\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = l \in \mathbf{R}^*$ atunci $l = 1$.

Barem de notare. a)

Prin inducție matematică se obține $a_n > 0, \forall n \geq 1$ deci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este mărginit inferior.....1p

$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + na_n^2 > 1, \forall n \geq 1$ deci șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este strict descrescător.....1p

Din teorema lui Weierstrass șirul $(a_n)_{n \geq 1}$ este convergent și are limita $a \in \mathbb{R}, a \geq 0$1p

Dacă $a \neq 0$ atunci prin trecere la limită în relația de recurență se obține $a = 0$ fals. Prin urmare $a = 0$1p

b) $l = \lim_{x \rightarrow \infty} na_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n}{\frac{1}{a_n}}$. Șirul $\frac{1}{a_n}$ este strict crescător și are limita ∞1p

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n+1-n}{\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{na_n} = \frac{1}{l}$1p

Din lema Stolz Cesaro rezultă $l = \frac{1}{l}$ și $l = 1$1p

SUBIECTUL II (7p)

Fie $\alpha > 0$ și o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ astfel încât $f(x+1) - f(x) > \alpha, \forall x \geq 0$.

Calculați $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.

Barem de notare.

În relația dată înlocuim pe x cu $x+1, x+2, \dots, x+n$ și obținem

$f(x+1) - f(x) > \alpha, f(x+2) - f(x+1) > \alpha, f(x+3) - f(x+2) > \alpha, \dots, f(x+n) - f(x+n-1) > \alpha$...2p

Adunând aceste inegalități rezultă $f(x+n) > f(x) + n\alpha, \forall x \geq 0, \forall n \geq 1$1p

Pentru $x \geq 1$: $f(x) = f([x] + \{x\}) \geq f(\{x\}) + \alpha[x] \geq \alpha[x]$2p

$\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha[x] = \infty$. Din criteriul majorării se obține $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$2p

SUBIECTUL III (7p)

Fie $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ astfel încât $A + B = AB$. Demonstrați că

a) $I_n - A$ și $I_n - B$ sunt inversabile.

b) $AB = BA$.

c) A este inversabilă dacă și numai dacă B este inversabilă.

Barem de notare.

a) $(I_n - A)(I_n - B) = I_n - A - B + AB = I_n$ 1p

$\det((I_n - A)(I_n - B)) = \det(I_n - A)\det(I_n - B) = \det I_n = 1 \neq 0$ deci $\det(I_n - A) \neq 0$; $\det(I_n - B) \neq 0$
 prin urmare $I_n - A$ și $I_n - B$ sunt inversabile.....1p

b) $(I_n - A)^{-1} = I_n - B$ deci $(I_n - A)(I_n - B) = (I_n - A)(I_n - B) = I_n$ 1p
 Efectuînd calculele se obține $AB = BA$1p

c) $A + B = AB \Rightarrow A = -(I_n - A)B \Rightarrow \det A = (-1)^n \det(I_n - A) \det B$ 2p
 $\det(I_n - A) \neq 0$ deci $\det A \neq 0 \Leftrightarrow \det B \neq 0$ și are loc concluzia.....1p

SUBIECTUL IV (7p)

Demonstrați:

- a) $\det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det A + \det B)$, $\forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$.
 b) $\det(A + B + C) = \det(A + B) + \det(A + C) + \det(B + C) - \det A - \det B - \det C$,
 $\forall A, B, C \in M_2(\mathbb{R})$.

Barem de notare.

- a) Prin calcul direct se demonstrează egalitatea cerută.....3p
 b) Folosind egalitatea de la punctul a) obținem
 $\det(A + B + C) + \det C = \frac{1}{2} \det(A + B + 2C) + \frac{1}{2} \det(A + B)$ 1p
 $\det A + \det B = \frac{1}{2} \det(A + B) + \frac{1}{2} \det(A - B)$ 1p
 $\frac{1}{2} \det(A + B + 2C) + \frac{1}{2} \det(A - B) = \det(A + C) + \det(B + C)$ 1p
 Adunând aceste egalități obținem egalitatea cerută.....1p