

Olimpiada de matematică
Faza locală
Blaj, 16.02.2013

Clasa a-X-a

Subiectul 1.

- a) Fie a, b numere reale fixate astfel încât $x = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 + b^3}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 + b^3}}$ să aibă sens. Arătați că expresia $E(x) = x^3 + 3bx$ nu depinde de x .
- b) Rezolvați ecuația: $\sqrt{x+3} + 2\sqrt{x+2} + \sqrt{x+6} - 4\sqrt{x+2} = 3$.

Subiectul 2.

Fie $x, y, z \in (1; \infty)$.

- a) Exprimați $\log_{x \cdot y \cdot z} x$ în funcție de $a = \log_x y \cdot z$ și $b = \log_z x \cdot y$.
- b) Demonstrați că: $\frac{\log_x z}{x+z} + \frac{\log_y x}{y+x} + \frac{\log_z y}{y+z} \geq \frac{9}{2(x+y+z)}$.

Subiectul 3.

- a) Dacă $z \in \mathbb{C} - \{\pm 1\}$, atunci $\frac{z-1}{z+1} \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow |z| = 1$
- b) Dacă $z_k \in \mathbb{C}, |z_k| = 1, k = 1, 2, 3$, atunci $\frac{1 + z_1^2 \cdot z_2^2 \cdot z_3^2}{(z_1 + z_2)(z_2 + z_3)(z_3 + z_1)} \in \mathbb{R}$.

Subiectul 4.

- a) Să se calculeze: $\cos \frac{\pi}{7} \cdot \cos \frac{2\pi}{7} \cdot \cos \frac{3\pi}{7}$.
- b) Rezolvați ecuația: $\left(\frac{1+zi}{1-zi} \right)^n = \frac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}, n \in \mathbb{N}^*, \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$.

Notă: Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.